Der Satz von Ceva
& Satz von Menelaus

Fast Viktor

21. November 2007

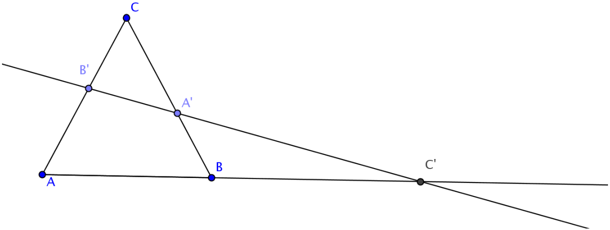
Inhaltsverzeichnis

Satz von Menelaus

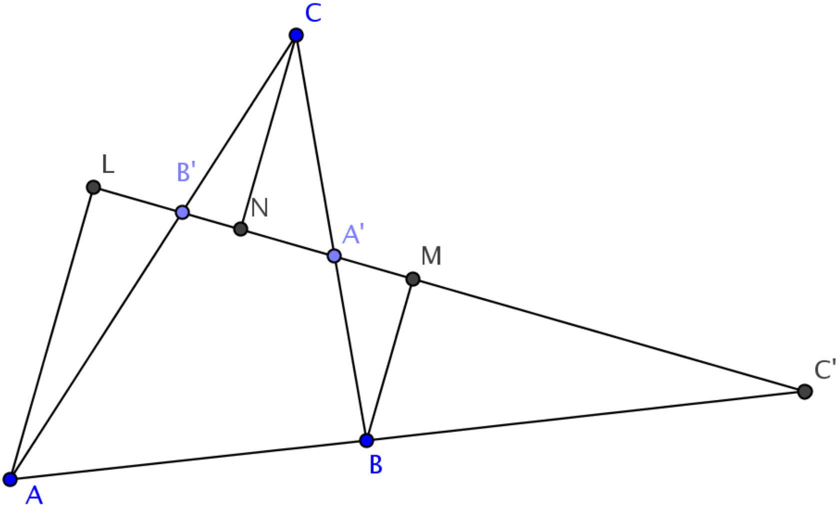
Satz (Transversale und Dreieck)

Sei ein Dreieck ΔABC und eine Transversale g gegeben, sodass g die Gerade BC im Punkt A', die Gerade AB im Punkt C' und die Gerade AC im Punkt B' schneidet. Dann gilt:

$$\frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = 1.$$



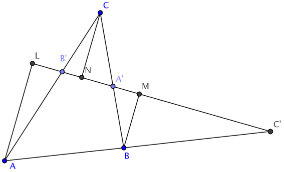
Satz von Menelaus



Satz von Menelaus

Beweis.

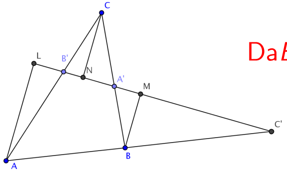
Wir fällen aus den Punkten A, B und C die Senkrechten auf die Transversale g, die die Transversale in den Punkten L, M und N schneiden. Jetzt gilt nach dem zweiten Strahensatz:



Satz von Menelaus

Beweis.

Wir fällen aus den Punkten A, B und C die Senkrechten auf die Transversale g, die die Transversale in den Punkten L, M und N schneiden. Jetzt gilt nach dem zweiten Strahensatz:

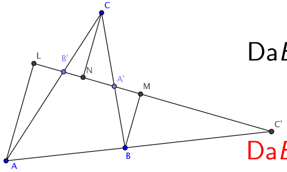


$$\text{Da} BC \parallel CN : \frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BM} \tag{1}$$

Satz von Menelaus

Beweis.

Wir fällen aus den Punkten A, B und C die Senkrechten auf die Transversale g, die die Transversale in den Punkten L, M und N schneiden. Jetzt gilt nach dem zweiten Strahensatz:



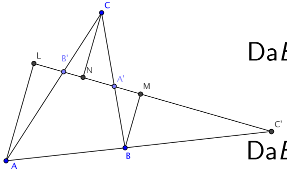
$$\text{Da} BC \parallel CN : \frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BM} \tag{1}$$

$$\text{Da} BM \parallel AL : \frac{C'B}{C'A} = \frac{BM}{AL} \tag{2}$$

Satz von Menelaus

Beweis.

Wir fällen aus den Punkten A, B und C die Senkrechten auf die Transversale g, die die Transversale in den Punkten L, M und N schneiden. Jetzt gilt nach dem zweiten Strahensatz:



$$\text{Da} BC \parallel CN : \frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BM} \tag{1}$$

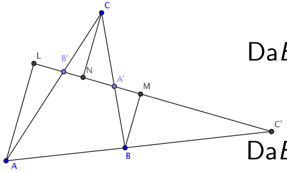
$$\text{Da} BM \parallel AL : \frac{C'B}{C'A} = \frac{BM}{AL} \tag{2}$$

$$\text{Da} CN \parallel AL : \frac{B'A}{B'C} = \frac{AL}{CN} \tag{3}$$

Satz von Menelaus

Beweis.

Wir fällen aus den Punkten A, B und C die Senkrechten auf die Transversale g, die die Transversale in den Punkten L, M und N schneiden. Jetzt gilt nach dem zweiten Strahensatz:



$$\text{Da} BC \parallel CN : \frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BM} \tag{1}$$

$$\text{Da} BM \parallel AL : \frac{C'B}{C'A} = \frac{BM}{AL} \tag{2}$$

$$\text{Da} CN \parallel AL : \frac{B'A}{B'C} = \frac{AL}{CN} \tag{3}$$

Durch Multiplikation der Beziehungen (1), (2) und (3) folgt:

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = \frac{CN}{BM} \cdot \frac{BM}{AL} \cdot \frac{AL}{CN} = 1$$

Somit ist der Beweis erbracht.

Satz von Menelaus

Satz (Satz von Menelaus)

Erfüllen drei Punkte $A' \in BC$, $B' \in AC$ und $C' \in AB$ die Beziehung:

$$\frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = 1,$$

dann liegen die drei Punkte auf einer Geraden (A', B', C' sind dann kollinear).

Beweis.

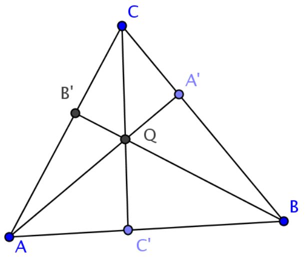
Ist die Rückrichtung des obigen Beweises. $\square$

Der Satz von Ceva

Satz (Geraden durch einen Eckpunkt und einen inneren Punkt eines Dreiecks)

Sei ein ΔABC ein Dreieck und Q ein Punkt in diesem Dreieck. Seien die Schnittpunkte Geraden AQ, BQ und CQ mit den Seiten des Dreiecks die Punkte A', B' und C'. Dann gilt:

$$\frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} = 1$$



Der Satz von Ceva

Beweis.

Für das Dreieck $\Delta ABA'$ und die Transversale CC' gilt nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{|CA'|}{|CB|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} \cdot \frac{|QA|}{|QA'|} = 1 \tag{4}$$

□

Der Satz von Ceva

Beweis.

Für das Dreieck $\Delta ABA'$ und die Transversale CC' gilt nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{|CA'|}{|CB|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} \cdot \frac{|QA|}{|QA'|} = 1 \tag{4}$$

Analog gilt für das Dreieck $\Delta AA'C$ und die Transversale BB':

$$\frac{|BC|}{|BA'|} \cdot \frac{|QA'|}{|QA|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = 1 \tag{5}$$

□

Der Satz von Ceva

Beweis.

Für das Dreieck $\Delta ABA'$ und die Transversale CC' gilt nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{|CA'|}{|CB|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} \cdot \frac{|QA|}{|QA'|} = 1 \tag{4}$$

Analog gilt für das Dreieck $\Delta AA'C$ und die Transversale BB':

$$\frac{|BC|}{|BA'|} \cdot \frac{|QA'|}{|QA|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = 1 \tag{5}$$

Wir multiplizieren die Beziehungen (4) und (5):

$$1 = \frac{|BC|}{|BA'|} \cdot \frac{|QA'|}{|QA|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC|}{|BA'|} \cdot \frac{|QA'|}{|QA|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} = \frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|}$$

$\square$

Der Satz von Ceva

Der Kehrsatz dieses Satzes ist der Satz von Ceva

Satz (Satz von Ceva)

Sei ΔABC ein Dreieck mit $A' \in BC$, $B' \in AC$ und $C' \in AB$. Wenn die Beziehung:

$$\frac{|A'C|}{|A'B|} \cdot \frac{|B'A|}{|B'C|} \cdot \frac{|C'B|}{|C'A|} = 1$$

gilt, dann schneiden sich die Graden AA', BB' und CC' in einem Punkt.

Beweis.

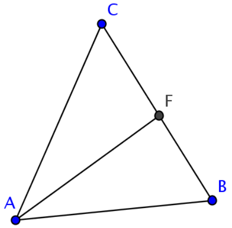
Ist die Rückrichtung des obigen Beweises. $\square$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Satz

Sei ΔABC ein Dreieck, w die Winkelhalbierende durch den Punkt A und F der Fusspunkt von w auf BC. Dann gilt:

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BF}.$$

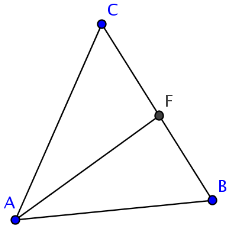


Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Satz

Sei ΔABC ein Dreieck, w die Winkelhalbierende durch den Punkt A und F der Fusspunkt von w auf BC. Dann gilt:

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AB}{BF}.$$



Beweis.

Da $EB \parallel AF$ folgt nach dem Strahlensatz von C aus:

$$\frac{CF}{AC} = \frac{AE + AC}{CF + FB} \Leftrightarrow CF \cdot (AE + AC) = AC \cdot (CF + FB)$$

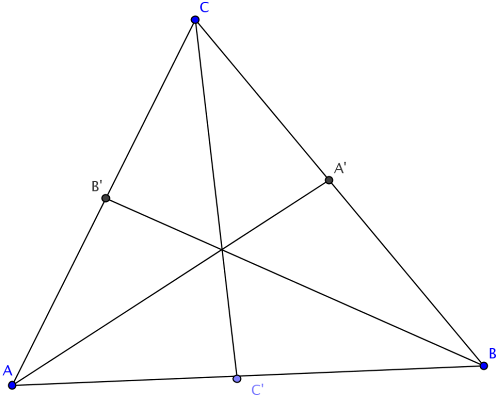
$$\Leftrightarrow CF{\cdot}AE{+}CF{\cdot}AC = AC{\cdot}CF{+}AC{\cdot}FB \Leftrightarrow CF{\cdot}AE = AC{\cdot}FB \Leftrightarrow \frac{CA}{CF} = \frac{AE}{BF}$$

Und da $AE = AB$ ist die Aussage bewiesen. $\square$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Satz

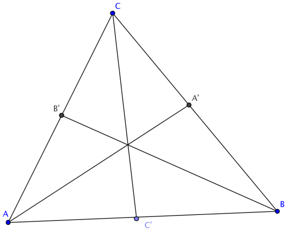
Sei ΔABC ein Dreick. Sei A' der Fusspunkt der Winkelhalbierenden durch den Punkt A auf CB, B' der Fusspunkt der Winkelhalbierenden durch den Punkt B auf AC und C' der Fusspunkt der Winkelhalbierenden durch den Punkt C auf AB. Dann schneiden sich AA', BB' und CC' in einem Punkt.



Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Beweis.

Nach dem vorhergehenden Satz wissen wir:

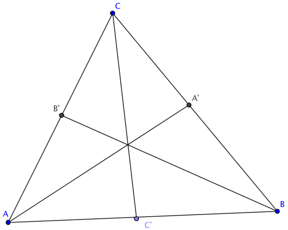


$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C}{A'B} \tag{6}$$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Beweis.

Nach dem vorhergehenden Satz wissen wir:



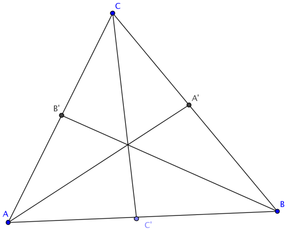
$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C}{A'B} \tag{6}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{B'C}{B'A} \tag{7}$$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Beweis.

Nach dem vorhergehenden Satz wissen wir:



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C}{A'B} \tag{6}$$

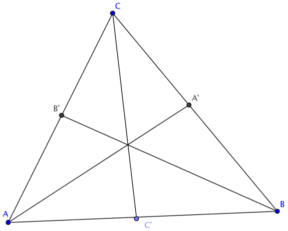
$$\frac{BA}{BC} = \frac{B'C}{B'A} \tag{7}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{C'B}{C'A} \tag{8}$$

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Beweis.

Nach dem vorhergehenden Satz wissen wir:



$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C}{A'B} \tag{6}$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{B'C}{B'A} \tag{7}$$

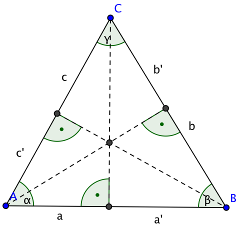
$$\frac{CB}{CA} = \frac{C'B}{C'A} \tag{8}$$

Wir multiplizieren die Verhältnisse (6)(7)(8):

$$\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{C'B}{C'A} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BA}{BC} \cdot \frac{CB}{CA} = 1$$

Und somit gilt nach dem Satz von Ceva, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.

Schnittpunkt der Höhen



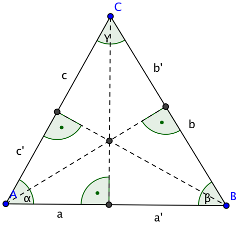
Satz

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

□

Schnittpunkt der Höhen



Satz

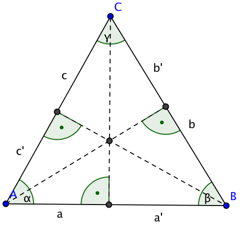
Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

$\frac{h_a}{a} = tan\alpha$, $\frac{h_a}{a'} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b'} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c'} = tan\alpha$,

□

Schnittpunkt der Höhen



Satz

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

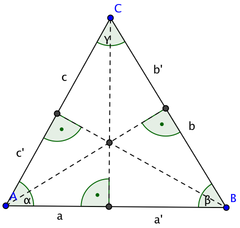
$\frac{h_a}{a} = tan\alpha$, $\frac{h_a}{a'} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b'} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c'} = tan\alpha$,

Wir multiplizieren die Verhältnisse:

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{h_a}{tan\alpha} : \frac{h_a}{tan\beta} \cdot \frac{h_b}{tan\beta} : \frac{h_b}{tan\gamma} \cdot \frac{h_c}{tan\gamma} : \frac{h_c}{tan\alpha}$$

□

Schnittpunkt der Höhen



Satz

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

$\frac{h_a}{a} = tan\alpha$, $\frac{h_a}{a'} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b} = tan\beta$, $\frac{h_b}{b'} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c} = tan\gamma$, $\frac{h_c}{c'} = tan\alpha$,

Wir multiplizieren die Verhältnisse:

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'} = \frac{h_a}{tan\alpha} : \frac{h_a}{tan\beta} \cdot \frac{h_b}{tan\beta} : \frac{h_b}{tan\gamma} \cdot \frac{h_c}{tan\gamma} : \frac{h_c}{tan\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_a}{tan\alpha} \cdot \frac{tan\beta}{h_a} \cdot \frac{h_b}{tan\beta} \cdot \frac{tan\gamma}{h_b} \cdot \frac{h_c}{tan\gamma} \cdot \frac{tan\alpha}{h_c} = 1$$

Somit gilt nach Ceva, dass sich die Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden. □

Schnittpunkt der Seitenhalbierenden

Bemerkung

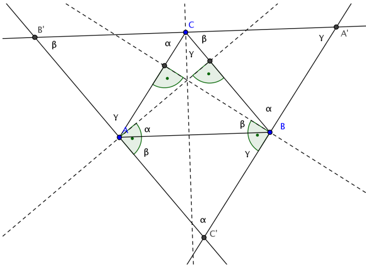
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt

Der Beweis ist mit Ceva trivial.

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.



□

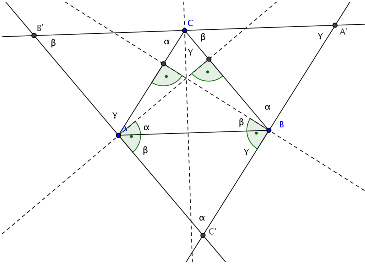
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.
$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$



□

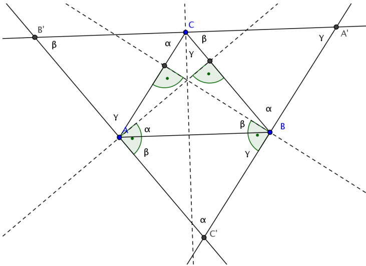
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.
$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$
$\beta = \angle ABC = \angle CB'A = \angle BCA' = \angle C'AB$



□

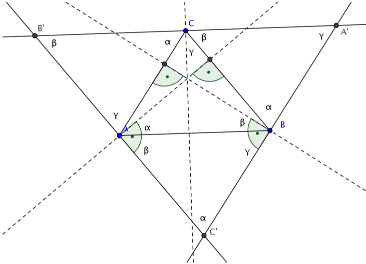
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.
$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$
$\beta = \angle ABC = \angle CB'A = \angle BCA' = \angle C'AB$
$\gamma = \angle ACB = \angle CBA' = \angle AC'B = \angle B'AC$



$\square$

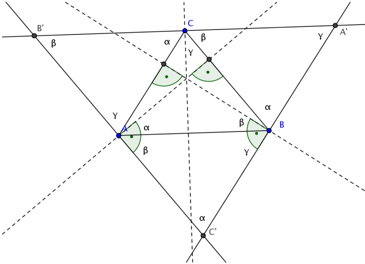
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.
$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$
$\beta = \angle ABC = \angle CB'A = \angle BCA' = \angle C'AB$
$\gamma = \angle ACB = \angle CBA' = \angle AC'B = \angle B'AC$
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABC' \cong \Delta AB'C \cong \Delta A'BC$



□

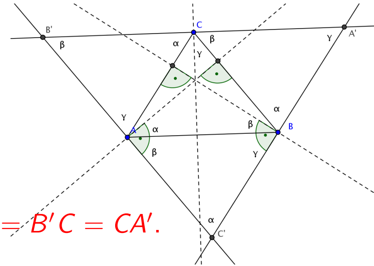
Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.
$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$
$\beta = \angle ABC = \angle CB'A = \angle BCA' = \angle C'AB$
$\gamma = \angle ACB = \angle CBA' = \angle AC'B = \angle B'AC$
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABC' \cong \Delta AB'C \cong \Delta A'BC$
$AC = C'B = A'B$, $BC = AC' = AB'$ und $AB = B'C = CA'$.



□

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

Satz

Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis.

Sei ΔABC ein Dreieck
und $\Delta A'B'C'$ sein *Umdreieck*.

$\Rightarrow \alpha = \angle CAB = \angle ABC' = \angle B'CA = \angle A'CB$

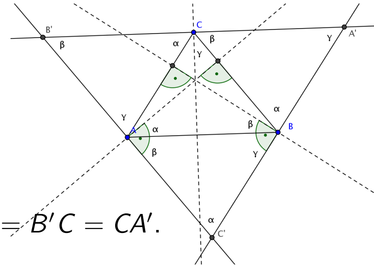
$\beta = \angle ABC = \angle CB'A = \angle BCA' = \angle C'AB$

$\gamma = \angle ACB = \angle CBA' = \angle AC'B = \angle B'AC$

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABC' \cong \Delta AB'C \cong \Delta A'BC$

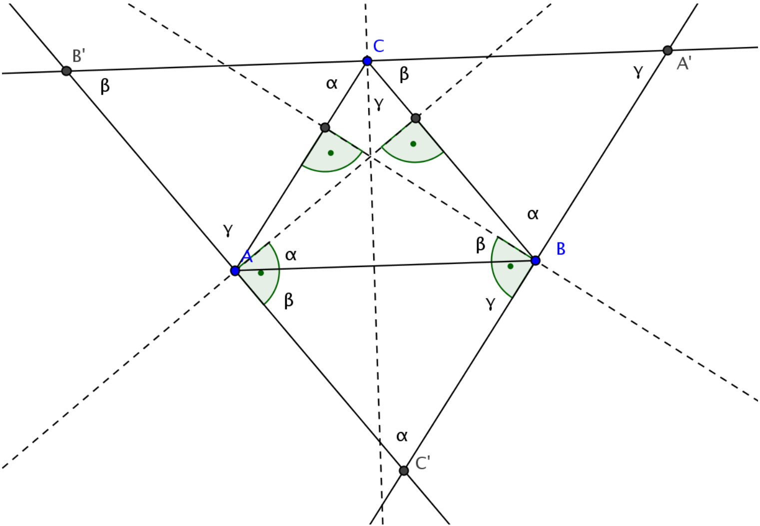
$AC = C'B = A'B$, $BC = AC' = AB'$ und $AB = B'C = CA'$.

$\Rightarrow h_c = m_{c'}$, $h_a = m'_a$ und $h_b = m_{b'}$



Da sich die Höhen in einem Punkt schneiden, schneiden sich auch die Mittelsenkrechten in einem Punkt. $\square$

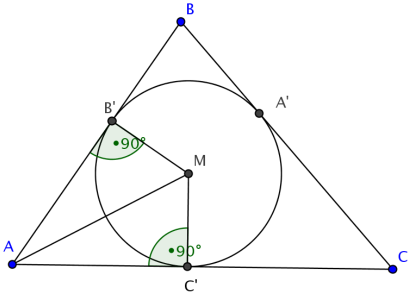
Mittelsenkrechtenschnittpunkt



Inkreistransversalen

Satz

Sei ΔABC ein Dreieck und K sein Inkreis mit dem Mittelpunkt M. Seien die Berührungspunkte von K mit den Seiten des Dreiecks A', B' und C'. Dann schneiden sich die Transversalen AA', BB' und CC' in einem Punkt.



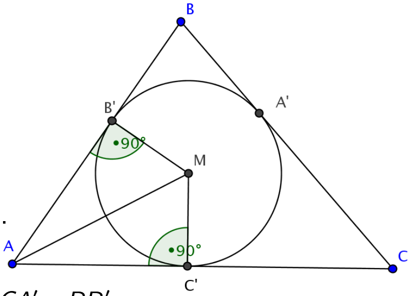
Inkreistransversalen

Satz

Sei ΔABC ein Dreieck und K sein Inkreis mit dem Mittelpunkt M. Seien die Berührungspunkte von K mit den Seiten des Dreiecks A', B' und C'. Dann schneiden sich die Transversalen AA', BB' und CC' in einem Punkt.

Beweis.

Da die Seiten von ΔABC K berühren
sind sie Tangenten von K
und somit senkrecht auf K.
$\Delta AC'M \cong \Delta AB'M$, da
$r = C'M = B'M$, $\frac{\pi}{2} = \angle AC'M = \angle AB'M$,
AM in beinen Dreiecken ist. $\Rightarrow AC' = AB'$.
Analog ist $BB' = BA'$ und $CA' = CC'$.

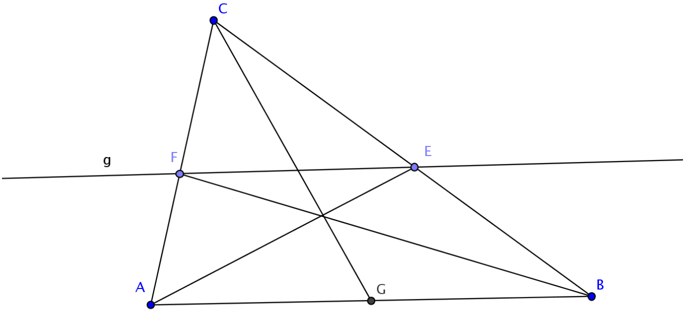


Daraus folgt sofort: $\dfrac{AC'}{C'C} \cdot \dfrac{CA'}{A'B} \cdot \dfrac{BB'}{B'A} = 1$

$\square$

Aufgabe

Sei ΔABC ein Dreieck und g eine Gerade, die parallel zu AB ist, die Seite AC im Punkt E und die Seite BC im Punkt F schneitet. Weiter sei G der Fusspunkt der Seitenhalbierenden auf AB.
Zeigen Sie, dass sich die Transversalen GC, FA und EB in einem Punkt



schneiden.