# Transversale Unterkomplexe in Gebäuden

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Universität Bielefeld

vorgelegt von

Frank Bourseau

Bielefeld, im Oktober 1994

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Sei $\Delta$ ein sphärisches Gebäude, d.h. ein Gebäude, dessen Apartments endliche Coxeter-Komplexe sind. Die geometrische Realisierung eines Apartments entspricht dann der Triangulierung einer Sphäre, und das Gebäude $\Delta$ ist nach dem Satz von Solomon und Tits [So] homotopieäquivalent zu einem Bouquet von Sphären.

Das Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung sogenannter transversaler Unterkomplexe von $\Delta$. Der zu einem Simplex $\sigma$ transversale (oder $\sigma$ gegenüberliegende) Unterkomplex $\Delta^0(\sigma)$ ist definiert als die Vereinigung der Sterne der zu $\sigma$ entgegengesetzten Simplizes. Diese sind durch die Entgegengesetztheitsinvolutionen in den Apartments, die $\sigma$ enthalten, eindeutig bestimmt.

Im Vordergrund steht in dieser Arbeit die Beantwortung der Frage, unter welchen Umständen transversale Unterkomplexe ähnliche Homotopieeigenschaften wie das gesamte Gebäude aufweisen. Der Ursprung dieser Problemstellung liegt in der Betrachtung der Endlichkeitseigenschaften von Chevalley-Gruppen über Funktionenkörpern (siehe [Abr1, Ab, Abr2]). Die Wirkung dieser Gruppen auf den zugehörigen Bruhat-Tits-Gebäuden und die lokale Struktur gewisser invarianter Filtrierungen der Gebäude lassen Rückschlüsse auf die Endlichkeitseigenschaften der Gruppen zu. Da der Link eines Simplex in einem Bruhat-Tits-Gebäude ein sphärisches Gebäude ist, stellt sich bei diesen Untersuchungen heraus, daß es sich bei den zu betrachtenden lokalen Eigenschaften um den Homotopietyp gegenüberliegender Unterkomplexe in sphärischen Gebäuden handelt.

Über topologische Aspekte hinausgehende Untersuchungen im Bezug auf eventuell vorhandene Strukturen in den gegenüberliegenden Komplexen – beispielsweise ähnlich den Apartments in Gebäuden – sind meines Wissens außer ihrer Beschreibung als Buekenhout-Tits-Geometrien [Brou] bisher nicht durchgeführt worden (Näheres zu diesen Geometrien findet sich z.B.in [Bue1, Bue2, Bue3, Ti1]). Eine weiteres Ziel dieser Arbeit sind daher Beiträge zur „Strukturerkennung“ in den transversalen Unterkomplexen.

Für Unterkomplexe der Gebäude vom Typ $A_n$, $C_n$ und $D_n$ sind in der Sphärizitätsfrage bereits Resultate erzielt worden, die sich in folgender Weise zusammenfassen lassen: Wenn das Gebäude „dick genug“ ist, sind die gegenüberliegenden Unterkomplexe sphärisch, für sehr „dünne“ Gebäude mit kleinen Rängen existieren jedoch Gegenbeispiele.

Allgemein gründen sich die bisher durchgeführten Sphärizitätsbeweise auf die folgenden Methoden:

1. Der Beweis des Satzes von Solomon und Tits wurde unter Ausnutzung der kombinatorischen Eigenschaften von Coxeter-Gruppen unabhängig vom speziellen Gebäudetyp durchgeführt (siehe [So, Ga, Bj1]).
2. Die Betrachtung des Nervs einer geeigneten Überdeckung des Simplizialkomplexes basiert auf einer Idee von Folkman (siehe [Fo, Lus, Qu3]).
3. Das Anheften von sphärischen Unterkomplexen an einen großen zusammenziehbaren Unterkomplex wurde in diesem Zusammenhang zum ersten Mal von Quillen durchgeführt. Dieser Ansatz lieferte die Grundlage für die bisher erzielten Resultate über die Homotopieeigenschaften von Unterkomplexen (siehe [Qu1, Vo, AA]).

Die bisher veröffentlichten Resultate betreffen ausschließlich Gebäude vom Typ $A_n$. So konnten Lusztig [Lus] und Vogtmann [Vo] mit der zweiten bzw. dritten Methode nachweisen, daß die einem Vertex vom Typ 1 bzw. $n$ gegenüberliegenden Komplexe in $A_n$-Gebäuden sphärisch sind.

Abels und Abramenko verwendeten das Beweisprinzip von Quillen für eine weitgehende Verallgemeinerung. Ihr Resultat besagt beispielsweise für den einer Kammer $\mathcal{C}$ gegenüberliegenden Komplex $\Delta^0(\mathcal{C})$: Falls der Körper $K$ groß genug ist, d.h. unendlich oder $q \geq 2^{n-1}$ für $K = \mathbb{F}_q$, so ist der Komplex sphärisch. Andererseits ist z.B. $\Delta^0_{A_3}(\mathcal{C})$ über $\mathbb{F}_2$ ein Torus (siehe z.B. [Ti4, AA]). Weitere Gegenbeispiele in kleinen Rängen über $\mathbb{F}_2$ stammen von Abramenko (siehe [AA]), über $\mathbb{F}_3$ war allerdings nur ein Gegenbeispiel bekannt: Im Gebäude zu $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{F}_3)$ besitzt der einer Kammer gegenüberliegende Komplex eine unendliche Fundamentalgruppe [Abr4]. Inzwischen hat Abramenko eine analoge Aussage auch für die Gruppe $\mathrm{SU}_6$ über $\mathbb{F}_4$ bewiesen [Abr5].

Nach einer geeigneten Beschreibung der gegenüberliegenden Komplexe [Abr3] konnte Abramenko mit einem ähnlichen Beweisansatz wie in [AA] vergleichbare Ergebnisse auch für $C_n$- und $D_n$-Gebäude erreichen [Abr4]. Im Gegensatz zum allgemeinen Satz von Solomon und Tits wurden diese Resultate jedoch nicht allgemein, sondern durch die Betrachtung eines konkreten Modells des Gebäudes als Fahnenkomplex einer Geometrie erzielt. Die dadurch erreichte Koordinatisierung ermöglichte es, den vagen Begriff „dick genug“ in eine konkrete Bedingung an die Größe des Körpers zu übersetzen, über dem die Geometrie definiert ist. Offensichtlich liegt der Nachteil dieser Herangehensweise darin, die Beweise für jeden einzelnen Gebäutetyp separat durchführen zu müssen.

Um die beschriebenen Wissenslücken zwischen Gegenbeispielen und den erwähnten hinreichenden Kriterien für die Sphärizität zu schließen, zielt ein wesentlicher Teil dieser Arbeit in die Richtung einer systematischen Suche nach Gegenbeispielen. Naheliegend ist in diesem Zusammenhang die Betrachtung der Euler-Charakteristik als ein bereits mittels der Anzahlen von Simplizes zu berechnendes hinreichendes Kriterium für die Nicht-Sphärizität. Durch die im zweiten Kapitel durchgeführte Berechnung und computerunterstützte Auswertung der Euler-Charakteristik in den Fällen $A_n$ und $C_n$ werden erstmalig nicht-sphärische Komplexe über $\mathbb{F}_3$ in $A_n$-Gebäuden nachgewiesen. Während die bisher angewendeten Methoden nur zur Entdeckung von Gegenbeispielen in sehr kleinen Rängen geführt haben, wird zusätzlich gezeigt, daß über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ auch in hohen Rängen viele transversale Unterkomplexe nicht sphärisch sind, und zwar sowohl in $A_n$- wie auch in $C_n$-Gebäuden.

Die Anwendung eines über die Euler-Charakteristik hinausgehenden Kriteriums von Björner und Kalai ergibt dagegen keine weiterführenden Ergebnisse, wobei in diesem Fall anzumerken ist, daß aufgrund von Laufzeit- und Kapazitätsproblemen der zur Verfügung stehenden Computersysteme nur ein kleiner Rangbereich einer Überprüfung unterzogen werden kann.

Natürlich ist die direkte Berechnung der Homologiegruppen die theoretisch am besten geeignete Methode zum Nachweis nicht sphärischer Unterkomplexe. Praktisch, d.h. bei der Umsetzung auf einem Computer, stößt man bei dieser Vorgehensweise jedoch auf erhebliche Kapazitätsprobleme aufgrund der Größe der Komplexe. In $A_n$-Gebäuden über $\mathbb{F}_4$ beispielsweise hat der kleinste einer Kammer $\mathcal{E}_n$ gegenüberliegende Unterkomplex, über den in diesem Bereich bisher keine Ergebnisse vorliegen, den Rang 4. Die folgende Tabelle gibt einen Eindruck von den Größenordnungen der dabei auftretenden Gleichungssysteme. Sie zeigt die Anzahl der Simplizes der einer Kammer gegenüberliegenden Unterkomplexe in $A_4$- und $A_5$-Gebäuden über $\mathbb{F}_4$.

| Dimension | $\Delta^0_{A_4}(\mathcal{E}_4)$ | $\Delta^0_{A_5}(\mathcal{E}_5)$ |
|---|---|---|
| 0 | 8.704 | 395.264 |
| 1 | 245.760 | 42.729.472 |
| 2 | 1.048.576 | 469.762.048 |
| 3 | 1.048.576 | 1.342.177.280 |
| 4 | 0 | 1.073.741.824 |

Meines Wissens steht kein Computersystem zur Verfügung, das die bei der Berechnung der Homologiegruppen auftretenden Gleichungssysteme dieser Größenordnung bewältigen kann.

Da einerseits der Nachweis der Existenz von nicht-sphärischen Komplexen über beliebig großen endlichen Körpern bisher nicht gelungen ist und andererseits mit den oben erwähnten Beweismethoden offenbar keine schärferen Resultate zu erzielen sind, ist das vorrangige Ziel des dritten Kapitels, andere Ideen als die oben erwähnten zum Nachweis der Sphärizität zu verwenden. Im Unterschied zu den bisher geführten Beweisen nutzt das dabei zur Anwendung gelangte Konzept der „allgemeinen Lage“ die Beobachtung aus, daß $\Delta^0$ und $\Delta$ sich bei näherer Betrachtung – zumindest was ihre Mächtigkeit betrifft – nur unwesentlich unterscheiden, mit anderen Worten, daß nur sehr wenige Simplizes des Gesamtgebäudes nicht transversal sind.

Mit dieser geometrisch sehr anschaulichen Methode ist es für $A_n$-Gebäude über unendlichen Körpern gelungen, die Sphärizität des einem einzelnen Vertex gegenüberliegenden Komplexes in eleganterer Form als bisher zu beweisen, im besonders bequem zu behandelnden Fall der Vertizes vom Typ 1 oder n sogar für alle Körper. Versuche, diese Beweisidee global auf den Fall endlicher Körper zu übertragen, waren jedoch aufgrund des fehlenden „Spielraums“ nicht erfolgreich.

Im Hinblick auf verfeinerte Strukturaussagen über die transversalen Komplexe ist die Frage naheliegend, unter welchen Umständen sie von Apartments des Gebäudes überdeckt werden. Hier erarbeiten wir in dieser Arbeit ein Kriterium für die Körpergröße, die linear mit der Dimension des betrachteten Komplexes steigt, während sie in dem Kriterium von Abels und Abramenko für die Sphärizität exponentiell wächst. Aussagen über Homotopieeigenschaften konnten allerdings aus der Überdeckung durch Apartments nicht hergeleitet werden.

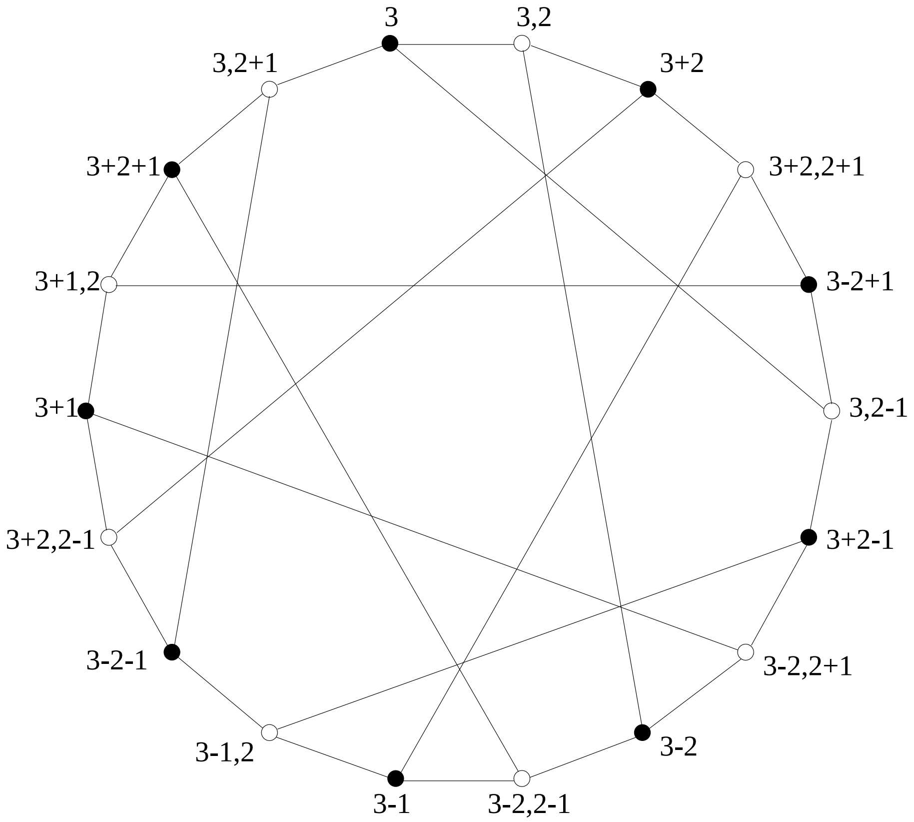
Die Beweisidee aus dem klassischen Satz von Solomon und Tits ist beispielsweise nicht direkt übertragbar, da in den transversalen Komplexen auch bei Überdeckung durch Apartments je zwei Kammern nicht unbedingt in einem gemeinsamen Apartment liegen müssen. Dies wird bereits an einem einfachen Beispiel deutlich:

Seien $V = {\mathbb{F}_3}^3$ mit der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\Delta$ der Fahnenkomplex, gebildet aus der partiell geordneten Menge der nichttrivialen, echten Unterräume von $V$. Der in diesem Gebäude vom Typ $A_2$ der Kammer $\mathcal{E} = \{\langle e_1\rangle < \langle e_1, e_2\rangle\}$ gegenüberliegende Unterkomplex $\Delta^0(\mathcal{E})$ hat die aus Abbildung 1 ersichtliche Gestalt. Zwar wird der Komplex offensichtlich durch Apartments überdeckt, aber eine genaue Betrachtung zeigt, daß z.B. kein die Kammer $\{\langle e_3\rangle < \langle e_3, e_2\rangle\}$ umfassendes Apartment die Kammern $\{\langle e_3+e_1\rangle < \langle e_3+e_1, e_2\rangle\}$ und $\{\langle e_3 - e_1\rangle < \langle e_3 - e_1, e_2\rangle\}$ enthält.

**Abb. 1**

Darstellung des Komplexes $\Delta^0_{A_2}(\{\langle e_1\rangle < \langle e_1, e_2\rangle\})$ über $\mathbb{F}_3$

Die Zeichen $i \pm j$ bzw. $i \pm j, j \pm l$ an den Vertizes sind Abkürzungen für $\langle e_i \pm e_j\rangle$ bzw. $\langle e_i \pm e_j, e_j \pm e_l\rangle$.




Da, wie oben bereits erwähnt, bisher kein einheitlicher Zugang für alle Gebäudetypen existiert, sondern „Koordinaten“ für Sphärizitätsbeweise notwendig zu sein scheinen, ist die Voraussetzung für Fortschritte im Fall der den Ausnahmegebäude $F_4$ und $E_i$ eine möglichst einfache Beschreibung der transversalen Komplexe über einer anschaulichen Geometrie, wie dies von Abramenko in [Abr3] für die klassischen Typen $A_n$, $C_n$ und $D_n$ durchgeführt wurde. Wir werden im letzten Abschnitt dieser Arbeit zur Komplettierung dieser Beschreibung beitragen und konkrete Modelle für die transversalen Komplexe in den zu Chevalley-Gruppen des Typs $E_6$ und $F_4$ gehörenden Gebäuden angeben.

Für die Betreuung dieser Arbeit möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Herbert Abels sehr herzlich bedanken. Für zahlreiche interessante Diskussionen danke ich auch Herrn Dr. Peter Abramenko.

# 1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

## 1.1 Simplizialkomplexe

Ein (abstrakter) Simplizialkomplex $\Delta = (\mathfrak{V}, \Delta)$ ist eine Menge $\mathfrak{V}$ von Vertizes zusammen mit einer Familie $\Delta$ von Teilmengen (Simplizes) von $\mathfrak{V}$, so daß jede Teilmenge eines Simplex wieder ein Simplex ist. Die Kardinalität $r$ eines Simplex $\sigma$ ist der Rang von $\sigma$, $r-1$ ist die Dimension.

Wir werden häufig sogenannte Fahnenkomplexe Flag $P$ betrachten, d.h. Simplizialkomplexe, die aus einer partiell geordneten Menge $P$ mit einer Inzidenzrelation (z.B. einer Geometrie bestehend aus Geraden, Ebenen usw.) konstruiert werden, indem man als Vertizes die Elemente von $P$ und als Simplizes die Fahnen in $P$, d.h. die Teilmengen paarweise inzidenter Elemente betrachtet.

Um einem abstrakten Simplizialkomplex topologische Eigenschaften zuzuschreiben, betrachtet man seine geometrische Realisierung (siehe [Sp]). Ein endlicher $d$-dimensionaler Komplex läßt sich beispielsweise durch einen aus geometrischen Simplizes im $\mathbb{R}^{2d+1}$ bestehenden Simplizialkomplex mit der vom $\mathbb{R}^{2d+1}$ induzierten Topologie realisieren. Wenn wir in dieser Arbeit topologische Eigenschaften eines Simplizialkomplexes bzw. einer partiell geordneten Menge untersuchen, so sind damit immer die Eigenschaften der geometrischen Realisierung des Komplexes bzw. des Fahnenkomplexes gemeint.

Wir nennen einen $d$-dimensionalen Simplizialkomplex $d$-sphärisch, falls er den Homotopietyp eines Bouquets von $d$-Sphären besitzt. Um dies festzustellen, bietet es sich an, die Homologiegruppen zu berechnen, denn der Homotopietyp eines einfach zusammenhängenden Simplizialkomplexes ist nach den Sätzen von Hurewicz und Whitehead (siehe [Sp, Chap. 7, Sec. 5 u. 6]) vollständig durch seine Homologiegruppen $H_i$ über $\mathbb{Z}$ (bzw. durch seine reduzierten Homologiegruppen $\tilde{H}_i$) bestimmt. Mit $b_i$ bzw. $\beta_i$ bezeichnen wir die Betti-Zahlen von $H_i$ bzw. $\tilde{H}_i$. $H_i$ und $\tilde{H}_i$ eines nichtleeren Komplexes sind für $i > 0$ gleich, für $i = 0$ gilt: $H_0 = \tilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z}$. Der für unsere Untersuchungen grundlegende, aus den Sätzen von Hurewicz und Whitehead folgende Satz lautet:

**Satz 1.1.1** *Sei $\Delta$ ein einfach zusammenhängender Simplizialkomplex mit $\tilde{H}_i(\Delta) = 0$ für $i \neq d = \dim(\Delta) > 1$ und $\tilde{H}_d(\Delta) = \mathbb{Z}^k$. Dann ist $\Delta$ homotopieäquivalent zu einem Bouquet von $k$ $d$-Sphären.*

## 1.2 Gebäude

Sei $\Delta$ ein sphärisches Gebäude und

$$\mathfrak{C}(\Delta) = \{\mathcal{C} \in \Delta \mid \dim \mathcal{C} \text{ maximal}\}$$

die Menge der Kammern von $\Delta$. Sei weiterhin

$$d \; : \; \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathbb{N}_0$$

die Galeriedistanz in $\mathfrak{C}$. Da $\Delta$ sphärisch ist, ist der Durchmesser

$$\operatorname{diam}(\Delta) = \max\{d(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \mid \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathfrak{C}\}$$

endlich, und $\mathcal{C}$ heiße *entgegengesetzt* zu $\mathcal{D}$ ($\mathcal{C} \operatorname{op} \mathcal{D}$), falls $d(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \operatorname{diam}(\Delta)$. Mit $\Sigma$ bezeichnen wir normalerweise ein Apartment von $\Delta$ und

$$\operatorname{op}_\Sigma \; : \; \Sigma \to \Sigma$$

sei die *Entgegengesetztheitsinvolution* in $\Sigma$, die jede Kammer auf die ihr entgegengesetzte Kammer abbildet. $\operatorname{op}_\Sigma$ ist nur dann ein Automorphismus von $\Sigma$, wenn das zugehörige Coxeter-Diagramm keine nichttriviale Symmetrie zuläßt. Für den Typ $A_n$ und $E_6$ wird das Diagramm durch die Wirkung von $\operatorname{op}_\Sigma$ beispielsweise umgedreht.

Mithilfe von $\operatorname{op}_\Sigma$ läßt sich der Begriff „entgegengesetzt“ auch auf die Simplizes beliebiger Dimension übertragen:

Wir definieren $\alpha$ und $\beta$ als entgegengesetzt ($\alpha \operatorname{op} \beta$), falls ein Apartment $\Sigma$ existiert, in dem $\beta = \operatorname{op}_\Sigma(\alpha)$.

Betrachten wir für einen festen Simplex $\alpha$ in $\Delta$ alle Kammern, die einen zu $\alpha$ entgegengesetzten Simplex enthalten, so bildet die Vereinigung dieser Kammern einen Unterkomplex von $\Delta$, den wir als *transversalen* oder *gegenüberliegenden* Unterkomplex $\Delta^0(\alpha)$ bezeichnen wollen:

$$\Delta^0(\alpha) := \bigcup_{\alpha^0 \operatorname{op} \alpha} \operatorname{St}(\alpha^0),$$

wobei

$$\operatorname{St}_\Delta(\alpha) := \{\gamma \in \Delta \mid \gamma \cup \alpha \in \Delta\}$$

den Stern von $\alpha$ bezeichnet. Ein oft betrachteter Unterkomplex des Sterns ist der Link von $\alpha$:

$$\operatorname{Lk}_\Delta(\alpha) := \{\gamma \in \operatorname{St}_\Delta(\alpha) \mid \gamma \cap \alpha = \emptyset\}.$$

Falls eine Gruppe $G$ typerhaltend und stark transitiv auf $\Delta$ wirkt, wie dies insbesondere bei Gebäuden, die von BN-Paaren stammen, der Fall ist, wird die Berechnung von $\Delta^0(\alpha)$ durch folgendes Lemma erleichtert:

**Lemma 1.2.1** *[Abr2, Lemma 9] $N_G(\alpha)$ wirkt transitiv auf den Kammern von $\Delta^0(\alpha)$.*

Eine Verfeinerung dieses Lemmas läßt sich angeben, falls $\Delta$ Moufangsch ist: Sei dazu für jede Wurzel (d.h. jedes Halbapartment) $\alpha$ mit Rand $\partial\alpha$

$$U_\alpha := \{g \in \mathrm{Aut}\ \Delta \,|\, g \text{ stabilisiert jede Kammer mit einer Wand in } \alpha \setminus \partial\alpha\}.$$

$U_\alpha$ heißt Wurzelgruppe, falls das Coxeter-Diagramm von $\Delta$ keine isolierten Punkte enthält, und $\Delta$ heißt Moufangsch, falls $U_\alpha$ transitiv (daraus folgt sogar einfach transitiv) auf den Apartments, die $\alpha$ enthalten, wirkt. Sei nun $\Phi$ die Menge der Wurzeln eines Apartments $\Sigma$ und $\Phi^+$ die Teilmenge von $\Phi$, deren Elemente eine feste Fundamentalkammer $\mathcal{C} \in \Sigma$ enthalten.

Für ein Moufangsches Gebäude $\Delta$ betrachten wir die von den $U_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ erzeugte Gruppe $G$. Sei $N$ der Stabilisator von $\Sigma$ in $G$, $H$ die Untergruppe von $N$, die alle Kammern von $\Sigma$ fixiert, $U := \langle U_\alpha \,|\, \alpha \in \Phi^+\rangle$ und $B := \langle H, U\rangle$. Dann ist $(B, N)$ ein Tits-System für $G$, $H = B \cap N$, $B$ ist das semidirekte Produkt $U \rtimes H$, und die unipotente Untergruppe $U$ operiert einfach transitiv auf den $\mathcal{C}$ gegenüberliegenden Kammern.

Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich von Chevalley-Gruppen stammende Gebäude betrachten. Da diese Moufangsch sind, steht uns die einfache Transitivität der unipotenten Untergruppe auf den einer Kammer gegenüberliegenden Kammern zur Argumentation stets zur Verfügung.

Um später darauf zurückgreifen zu können, wollen wir nun die konkreten Modelle für transversale Unterkomplexe in $A_n$- und $C_n$-Gebäuden zitieren (siehe [Abr3]).

## 1.3 $A_n$-Unterkomplexe

Für sphärische Gebäude vom Typ $A_n$ existiert eine sehr einfache Modellierung:

Sei $K$ ein Schiefkörper und $V$ ein $K$-Vektorraum der Dimension $n+1$. Sei

$$T(V) := \{U \mid 0 < U < V\}$$

die partiell geordnete Menge der nichttrivialen, echten Unterräume von $V$. Der zugehörige Fahnenkomplex

$$\Delta_{A_n} = \text{Flag } T(V)$$

ist ein Gebäude vom Typ $A_n$ [Ti1, ch.6] und typ $U = \dim U$. Tatsächlich kann jedes dicke Gebäude vom Typ $A_n$ mit $n \geq 3$ in dieser Weise dargestellt werden. Der von einer Basis $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ erzeugte Unterkomplex $\Sigma$ ist ein Apartment von $\Delta_{A_n}$, und jedes Apartment läßt sich in dieser Weise realisieren.

Für die Charakterisierung der Transversalität benötigen wir noch folgende

**Definition 1.3.1** *Seien $U, E$ Unterräume von $V$. $U$ heiße* **transversal** *zu $E$ (abgekürzt $U \pitchfork E$), falls $U + E = V$ oder $U \cap E = \{0\}$.*

Es gilt nun (siehe [Abr3, 1.2.1 und 1.2.2]):

Sei $E \in T(V)$ bzw. $\eta = \{E_1 < \cdots < E_l\} \in \Delta_{A_n}$. Dann gilt für alle $U \in T(V)$:

$$\begin{array}{lcl} U \,\text{op}\, E & \Leftrightarrow & U \oplus E = V, \\ \Delta^0_{A_n}(\eta) & = & \text{Flag}\{U \in T(V) \mid U \pitchfork E_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, l\}. \end{array}$$

Das Sphärizitätsergebnis für $A_n$-Unterkomplexe aus [AA] lautet nun:

**Satz 1.3.2** *Sei $\mathcal{E}$ eine endliche Menge von Unterräumen von $V$ und $e_j := \#\{E \in \mathcal{E} \mid \dim E = j\}$. Dann gilt: Falls $\sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} e_j \leq q$, ist $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E})$ $(n-1)$-dimensional und $(n-1)$-sphärisch.*

Falls also $\mathcal{E}$ eine Kammer ist, ist $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E})$ sphärisch, falls $q \geq 2^{n-1}$.

## 1.4 $C_n$-Unterkomplexe

Sei $K$ wieder ein Schiefkörper und $V$ ein $K$-Vektorraum mit einer nicht ausgearteten $(\sigma, \varepsilon)$-hermiteschen Form $g : V \times V \to K$ oder mit einer nicht ausgearteten $(\sigma, \varepsilon)$-quadratischen Form $q : V \to K/K_{\sigma,\varepsilon}$ (Für diese und folgende Notationen siehe [Ti2, ch.8]) Der Witt-Index $n$ von $(V, f)$ bzw. $(V, q)$ sei endlich und $\geq 2$. Wir defnieren nun die partiell geordnete Menge

$$T(V) := \{0 < U < V \mid U \text{ ist ein total isotroper (bzw. total singulärer) Unterraum von } V\}$$

und setzen $\Delta_{C_n} := \text{Flag } T(V)$.

Dann ist $\Delta_{C_n}$ ein Gebäude vom Typ $C_n$ mit typ $U = \dim U$. $\Delta_{C_n}$ ist dick, es sei denn, daß $(\sigma, \varepsilon, \dim V) = (\mathrm{id}, 1, 2n)$ und eine der folgenden Bedingungen gilt: (i) char $K \neq 2$, (ii) $T(V)$ gehört zu einer quadratischen Form. Bis auf die Ausnahmen der nicht einbettbaren $C_3$-Gebäude lassen sich alle dicken $C_n$-Gebäude für $n \geq 3$ in dieser Weise konstruieren ([Ti2, ch.7 u. 8]).

Ferner gilt: Sei $\{e_1, \ldots, e_n, f_n, \ldots, f_1\}$ eine symplektische Basis von $V$, d.h. $g(e_i, e_j) = 0 = g(f_i, f_j)$ und $g(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Dann ist der von einer solchen Basis erzeugte Unterkomplex ein Apartment von $\Delta_{C_n}$ und jedes Apartment ist in dieser Weise darstellbar.

In diesem Fall gilt (siehe [Abr3, 1.2.3 und 1.2.4]):

Sei $E \in T(V)$ bzw. $\eta = \{E_1 < \cdots < E_l\} \in \Delta_{C_n}$.

$$\begin{aligned} U \,\mathrm{op}\, E &\Leftrightarrow U \oplus E^\perp = V, \\ \Delta^0_{C_n}(\eta) &= \text{Flag } \{U \in T(V) \mid U \pitchfork E_j^\perp \text{ für alle } j = 1, \ldots, l\}. \end{aligned}$$

# 2 Kombinatorische Sphärizitätstests

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Simplizialkomplex nicht sphärisch ist, liefert die Berechnung der Euler-Charakteristik.

Dazu führen wir in Anlehnung an [BK2] die folgende Notation ein: Mit $f_k$ bezeichnen wir die Anzahl der $k$-dimensionalen Simplizes von $\Delta$, und für $\dim(\Delta) = d$ ist der Vektor $f = (f_0, \ldots, f_d)$ der sogenannte $f$-Vektor von $\Delta$. Für die spätere Berechnung der $f$-Vektoren spezieller Komplexe ist es nützlich, den $f$-Vektor auch für alle $k \in \mathbb{N}$ zu definieren, wir setzen deshalb: $f_{-1} := 1$, falls $\Delta \neq \emptyset$ sowie $f_k := 0$ für alle $k < -1$ und $k > d$. Diese Definition ist sinnvoll, weil in jedem nichtleeren Simplizialkomplex die leere Menge ein Simplex der Dimension $-1$ ist.

Die Formel von Euler-Poincaré stellt einen Zusammenhang zwischen den Betti-Zahlen und dem $f$-Vektor eines Komplexes $\Delta$ her und definiert gleichzeitig die sogenannte Euler-Charakteristik $\chi$ eines Komplexes $\Delta$:

$$\chi = \sum_{i \geq 0} (-1)^i f_i = \sum_{i \geq 0} (-1)^i b_i.$$

Entsprechend den reduzierten Homologiegruppen führt man auch die reduzierte Euler-Charakteristik ein:

$$\tilde{\chi} := \chi - 1.$$

Satz 1.1.1 liefert mithilfe der Euler-Poincaré Formel sofort ein notwendiges Kriterium für die Sphärizität eines Simplizialkomplexes.

**Lemma 2.0.1** *Sei $\Delta$ einfach zusammenhängend und $d = \dim(\Delta)$. Falls $\Delta$ sphärisch ist, gilt*

$$(-1)^d (\chi - 1) > 0.$$

*Beweis:* Da $\Delta$ sphärisch ist, folgt $\chi = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i b_i = b_0 + (-1)^d b_d = 1 + (-1)^d b_d$. □

Wir wollen nun dieses Kriterium an einigen Beispielen auswerten. Dazu beginnen wir mit Gebäuden vom Typ $A_n$, genauer gesagt, mit den einer Kammer entgegengesetzten Unterkomplexen in Gebäuden vom Typ $A_n$.

## 2.1 Die Eulercharakteristik von $A_n$-Unterkomplexen

In Abschnitt 1.3 haben wir bereits die Modellierung für transversale Unterkomplexe in Gebäuden vom Typ $A_n$ angegeben.

Sei also $V$ ein $n+1$-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$, $\Delta = \mathrm{Flag}\{0 < U < V\}$, $\mathcal{E}_n = \{E_1, \dots E_n\}$ eine Kammer von $\Delta$. Dann ist

$$\Delta^0(\mathcal{E}) = \mathrm{Flag}\{0 < U < V \mid U \pitchfork E_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

der zu $\mathcal{E}_n$ transversale Komplex.

**Satz 2.1.1** *Wir setzen $f(0;q)_{-1} := 1$. Für den $f$-Vektor*

$$f(n;q) = (f(n;q)_{-1}, \dots, f(n;q)_{n-1})$$

*von $\Delta^0(\mathcal{E}_n)$ gilt für $n > 0$ folgende Rekursionsformel:*

$$\begin{aligned} f(n;q)_{-1} &= 1 \quad \textit{und} \\ f(n;q)_m &= \sum_{i=1}^{n-m} q^{i(n+1-i)} f(n-i;q)_{m-1} \end{aligned}$$

*für $m = 0, \dots, n-1$.*

*Beweis:* Sei $n = 1$. Dann ist $f(n;q)_0$ die Anzahl der Geraden, die in einem Vektorraum der Dimension 2 über $\mathbb{F}_q$ mit einer festen Geraden den ganzen Raum aufspannen, also $q$. Andererseits gilt $\sum_{i=1}^{1} q f(0;q)_{-1} = q$, also folgt die Behauptung.

Sei nun $n > 1$, und o.B.d.A. sei $\mathcal{E}_n = \{\langle e_1 \rangle < \dots < \langle e_1, \dots, e_n \rangle\}$. Eine transversale maximale Fahne zu $\mathcal{E}_n$ ist dann $\mathcal{C}_n = \{\langle e_{n+1} \rangle < \dots < \langle e_{n+1}, \dots, e_2 \rangle\}$. Die unipotente Untergruppe

$$\mathrm{U}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilisiert $\mathcal{E}_n$ und wirkt transitiv auf $\Delta^0(\mathcal{E}_n)$. Daher ist die Anzahl der Simplizes $f(n;q)_m$ der Dimension $m$ gleich der Summe der Indizes der Stabilisatoren der $m$-dimensionalen Simplizes in $\mathcal{C}_n$.

Sei also $S_n^m$ die Menge der Simplizes der Dimension $m$ in $\mathcal{C}_n$. $S_n^m$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $S_n^m(i) = \{\sigma \in S_n^m \mid \sigma = \{\langle e_{n+1}, \ldots, e_{n+1-i}\rangle < \cdots\}\}$ für $i = 0, \ldots, n-m-1$. Offensichtlich können wir $S_n^m(i)$ mit der Menge $S_{n-i-1}^{m-1}$ identifizieren, d.h. mit der Menge der $(m-1)$-dimensionalen Simplizes in der Fahne $\{\langle e_{n-i}\rangle < \cdots < \langle e_{n-i}, \ldots, e_2\rangle\}$.

Nun ist die Ordnung von $\mathrm{U}_{n+1}$ offenbar $q^{n(n+1)/2}$ und für die Ordnung der Fixgruppe eines Simplex $\sigma \in S_n^m$ gilt

$$\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n+1}}(\sigma) = q^{(i+1)i/2} \#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n-i}}(\sigma')$$

mit $\sigma' \in S_{n-i-1}^{m-1}$, denn

$$\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n+1}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n-i}}(\sigma') & 0 \\ 0 & \mathrm{U}_{i+1} \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f(n;q)_m &= \sum_{\sigma \in S_n^m} \frac{\#\mathrm{U}_{n+1}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n+1}}(\sigma)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-m-1} \sum_{\sigma \in S_n^m(i)} \frac{\#\mathrm{U}_{n+1}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n+1}}(\sigma)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-m-1} \sum_{\sigma' \in S_{n-i-1}^{m-1}} \frac{q^{(i+1)i/2} q^{(i+1)(n-i)} \#\mathrm{U}_{n-i}}{q^{(i+1)i/2} \#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n-i}}(\sigma')} \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} q^{i(n+1-i)} \sum_{\sigma' \in S_{n-i}^{m-1}} \frac{\#\mathrm{U}_{n+1-i}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{n+1-i}}(\sigma')} \\ &= \sum_{i=1}^{n-m} q^{i(n+1-i)} f(n-i;q)_{m-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Es ergibt sich als Korollar sofort eine Formel für die Euler-Charakteristik:

**Korollar 2.1.2** *Wir setzen $\chi_0(q) := 0$. Für die Euler-Charakteristik $\chi_n(q)$ von $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$ gilt dann für $n > 0$*

$$\chi_n(q) = \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} \Big(1 - \chi_{n-i}(q)\Big).$$

*Beweis:* Offenbar gilt die Gleichung für $n = 1$. Für $n > 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\chi_n(q) &= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m f(n;q)_m \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \sum_{i=1}^{n-m} q^{i(n+1-i)} f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} \left(1 - \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} f(n-i;q)_{m-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} \left(1 - \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^{m} f(n-i;q)_{m}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{i(n+1-i)} \Big(1 - \chi_{n-i}(q)\Big).
\end{aligned}$$

□

Die Auswertung der kombinatorischen Kriterien erfolgte mit den Computeralgebra-Programmpaketen Mathematica 2.0 und Maple, die eine nahezu unbegrenzte ganzzahlige Arithmetik zulassen, während die meisten anderen Programmiersprachen ganze Zahlen nur bis zu einer vom jeweiligen Prozessor abhängigen Größe direkt verwalten können. Der Rechenzeitaufwand nimmt allerdings beim Überschreiten der Maschinengrenze erheblich zu, da große Werte als Zahlenlisten behandelt werden müssen. Das Programmpaket Mathematica erwies sich hinsichtlich dieser Anforderungen als etwas leistungsfähiger.

Wir werden nun mit der eben hergeleiteten Formel für $\chi_n(q)$ und Lemma 2.0.1 zeigen, daß über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ sehr viele Unterkomplexe vom Typ $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$ nicht sphärisch sind.

Das im Anhang A.1 aufgeführte Programm `chi` beinhaltet die Umsetzung der Rekursionsformel für die Euler-Charakteristik in ein Mathematica-Programm, und die Funktion `chartest` berechnet das Vorzeichen von $(-1)^{i-1}(\chi_i(q) - 1)$ für $q = 2$ und $q = 3$ und $i = 2, \ldots, n$.

Die Abbildung 2 zeigt das Ergebnis eines Programmlaufs von `chartest` bis

$n = 100$. Die weitere Auswertung für größere Ränge, die bis $n = 250$ durchgeführt wurde, zeigt ein ähnliches Bild, nämlich Vorzeichenwechsel mit Perioden von 3-4 im Fall $q = 2$ und von 11-12 im Fall $q = 3$, während das Kriterium über größeren Körpern in diesem Rangbereich (durchgeführt für $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7$) keine Beispiele für nicht sphärische Komplexe liefert.

Aufgrund der mit dem Computer durchgeführten Untersuchungen läßt sich zusammenfassend folgendes formulieren:

**Resultat:**

1. *Die zu einer Kammer $\mathcal{E}_n$ transversalen Unterkomplexe in Gebäuden vom Typ $A_n$ über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ im Rangbereich von $n = 3$ bis 250 sind in großer Zahl nicht sphärisch.*

2. *$\Delta^0_{A_{10}}(\mathcal{E}_{10})$ ist ist der kleinste bisher bekannte nicht-sphärische Komplex über $\mathbb{F}_3$. (Über $\mathbb{F}_2$ ist bereits $\Delta^0_{A_3}(\mathcal{E}_3)$ ein Torus).*

3. *Die Euler-Charakteristik liefert im Rangbereich von $n = 3$ bis $n = 250$ keine Gegenbeispiele für nicht-sphärische Komplexe über den Körpern $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_5$.*

Aufgrund der Computerresultate stellt sich nun die Frage, ob tatsächlich unendlich viele der von uns betrachteten Komplexe über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ nicht sphärisch sind - dies erscheint aufgrund der aufgetretenen Periodizität wahrscheinlich - und ob das Kriterium für alle größeren Körper keine Ergebnisse liefert.

Um Resultate in dieser Richtung zu erzielen, ist es wünschenswert, die unhandliche Rekursionsformel für die Euler-Charakteristik in geschlossener Form darzustellen. Dies ist jedoch bisher nicht gelungen.

Auch die zweite Vermutung ist selbst durch eine detaillierte (Computer-) Analyse der Formel nicht zu bestätigen. Betrachten wir dazu $p_n(x) := (-1)^{n-1}(\chi_n(x) - 1)$ als Polynom über $\mathbb{R}$. Da wir bereits wissen, daß $\Delta^0(\mathcal{E}_n)$ für ein genügend großes $q_n$ sphärisch ist, muß $p_n(x) > 0$ für $x \geq q_n$ gelten. Die Behauptung, daß unser Kriterium für $q \geq 4$ tatsächlich keine Beispiele liefert, wäre also bewiesen, wenn wir zeigen könnten, daß die größte reelle Nullstelle von $p_n(x)$ für alle $n$ kleiner als 4 ist.

Die Abbildung 3 zeigt die größten reellen Nullstellen von $p_n(x)$ für $n = 1, \ldots, 14$. Darüber hinaus war keine Berechnung mehr möglich. Eine Prognose, ob die größten Nullstellen für wachsendes $n$ die Zahl 4 überschreiten, ist aus diesen Informationen nicht ablesbar; aufgrund des geringen Wachstums ist es jedoch wahrscheinlich, daß dies, wenn überhaupt, erst bei sehr großen Werten für $n$ auftritt.

Um zu zeigen, daß die Nullstellen von $p_n(x)$ kleiner als 4 sind, könnte man die Verwendung der Anzahlformel für Null- und Polstellen aus der Funktionentheorie (siehe z.B [Re, 13.3.2]) denken. Betrachtet man $p_n(x)$ über den komplexen Zahlen, so ergibt sich tatsächlich eine interessante Nullstellenverteilung in der komplexen Ebene, die an einigen Beispielen in der Abbildung 4 dargestellt ist. Obwohl die Grafiken diesen Ansatz vielversprechend erscheinen lassen, hat die komplizierte Rekursionsformel jedoch theoretische Ergebnisse in dieser Richtung bisher nicht ermöglicht.

**Abb. 2**

Vorzeichen von $(-1)^{n-1}(\chi_n(q)-1)$ für $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$ über $\mathbb{F}_q$

| $n$ | $q=2$ | $q=3$ | $n$ | $q=2$ | $q=3$ | $n$ | $q=2$ | $q=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 35 | −1 | −1 | 68 | 1 | 1 |
| 3 | −1 | 1 | 36 | 1 | −1 | 69 | −1 | 1 |
| 4 | −1 | 1 | 37 | 1 | −1 | 70 | −1 | 1 |
| 5 | −1 | 1 | 38 | 1 | −1 | 71 | −1 | 1 |
| 6 | −1 | 1 | 39 | 1 | −1 | 72 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 40 | −1 | −1 | 73 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 41 | −1 | −1 | 74 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 1 | 42 | −1 | −1 | 75 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | −1 | 43 | 1 | −1 | 76 | −1 | 1 |
| 11 | −1 | −1 | 44 | 1 | 1 | 77 | −1 | 1 |
| 12 | −1 | −1 | 45 | 1 | 1 | 78 | −1 | −1 |
| 13 | −1 | −1 | 46 | 1 | 1 | 79 | −1 | −1 |
| 14 | 1 | −1 | 47 | −1 | 1 | 80 | 1 | −1 |
| 15 | 1 | −1 | 48 | −1 | 1 | 81 | 1 | −1 |
| 16 | 1 | −1 | 49 | −1 | 1 | 82 | 1 | −1 |
| 17 | 1 | −1 | 50 | −1 | 1 | 83 | −1 | −1 |
| 18 | −1 | −1 | 51 | 1 | 1 | 84 | −1 | −1 |
| 19 | −1 | −1 | 52 | 1 | 1 | 85 | −1 | −1 |
| 20 | −1 | −1 | 53 | 1 | 1 | 86 | −1 | −1 |
| 21 | 1 | −1 | 54 | −1 | 1 | 87 | 1 | −1 |
| 22 | 1 | 1 | 55 | −1 | 1 | 88 | 1 | −1 |
| 23 | 1 | 1 | 56 | −1 | −1 | 89 | 1 | 1 |
| 24 | 1 | 1 | 57 | −1 | −1 | 90 | −1 | 1 |
| 25 | −1 | 1 | 58 | 1 | −1 | 91 | −1 | 1 |
| 26 | −1 | 1 | 59 | 1 | −1 | 92 | −1 | 1 |
| 27 | −1 | 1 | 60 | 1 | −1 | 93 | −1 | 1 |
| 28 | −1 | 1 | 61 | −1 | −1 | 94 | 1 | 1 |
| 29 | 1 | 1 | 62 | −1 | −1 | 95 | 1 | 1 |
| 30 | 1 | 1 | 63 | −1 | −1 | 96 | 1 | 1 |
| 31 | 1 | 1 | 64 | −1 | −1 | 97 | 1 | 1 |
| 32 | −1 | 1 | 65 | 1 | −1 | 98 | −1 | 1 |
| 33 | −1 | −1 | 66 | 1 | −1 | 99 | −1 | 1 |
| 34 | −1 | −1 | 67 | 1 | 1 | 100 | −1 | 1 |

**Abb. 3**

Darstellung der größten reellen Nullstellen von $p_n$ von $n = 1, \ldots, 14$

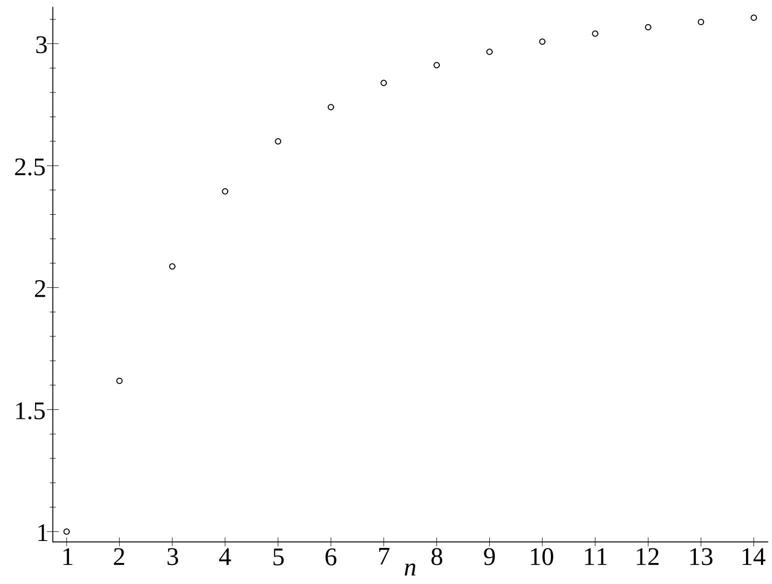
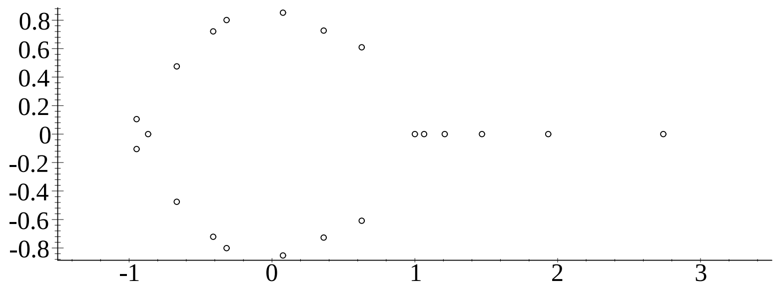
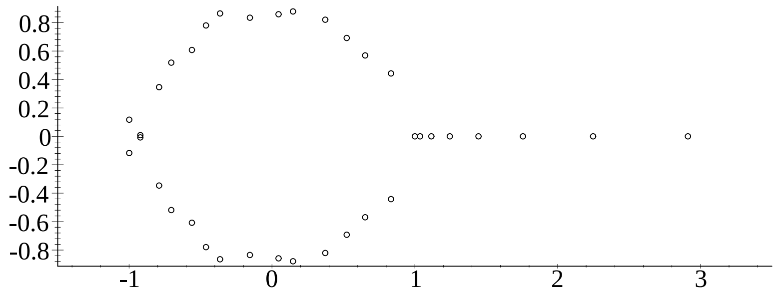



**Abb. 4**

Komplexe Nullstellen von $p_6$

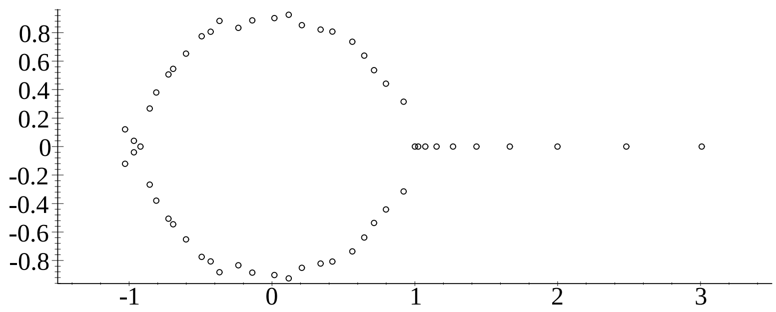



Komplexe Nullstellen von $p_8$

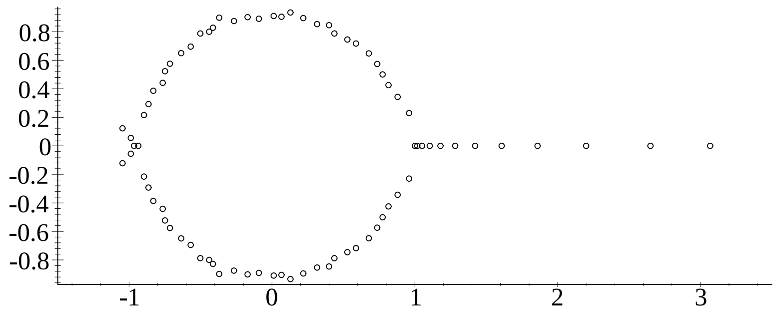


Fortsetzung von Abb. 4

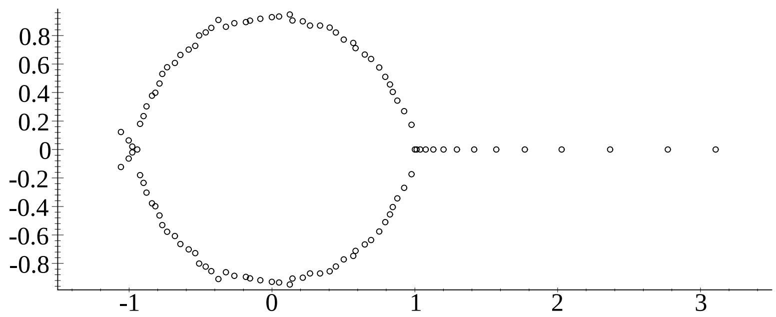
Komplexe Nullstellen von $p_{10}$




Komplexe Nullstellen von $p_{12}$




Komplexe Nullstellen von $p_{14}$



## 2.2 Die Eulercharakteristik von $C_n$-Unterkomplexen

Wir betrachten nun das klassische Beispiel eines $C_n$-Gebäudes, dessen Modellierung bereits in Abschnitt 1.4 zitiert wurde, und das hier noch etwas spezialisiert werden soll:

Sei $V$ ein $2n$-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit Basis $\{e_1, \ldots e_n, f_n, \ldots, f_1\}$ und die alternierende Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle = 0,\ \langle e_i, f_j\rangle = \delta_{ij} = -\langle f_i, e_j\rangle.$$

$\Delta := \mathrm{Flag}\{0 < U < V \mid U \text{ ist total isotrop}\}$ ist dann das zur symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ gehörige Gebäude vom Typ $C_n$. Sei $\mathcal{E}_n = \{E_1 < \cdots < E_n\}$ eine Kammer von $\Delta$. Für den zu $\mathcal{E}_n$ transversalen Unterkomplex gilt:

$\Delta^0(\mathcal{E}_n) = \mathrm{Flag}\{0 < U < V \,|\, U \text{ ist total isotrop und } U \pitchfork E_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$

Zunächst studieren wir die Eigenschaften der auf $\Delta^0(\mathcal{E}_n)$ einfach transitiv operierenden unipotenten Untergruppe, genauer gesagt ihre Ordnung und die Ordnung von Fixuntergruppen. Dazu einige Notationen:

Schreiben wir die Elemente aus $V$ als $(X,Y),(Z,W)$, mit $X,Y,Z,W \in \mathbb{F}_q^n$ so ist $\langle (X,Y),(W,Z)\rangle = XW' - Y'W$, wobei $X' = (x_n, \ldots, x_1)$, falls $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ sei die Untergruppe der symplektischen Matrizen in $\mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{F}_q)$, d.h. der Matrizen, die $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariant lassen. Für die Spalten einer Matrix $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ gelten dann dieselben inneren Produktrelationen wie für die oben angegebene Basis von $V$.

Sei nun $\mathrm{U}_{2n}$ die unipotente Untergruppe von $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$.

**Lemma 2.2.1** *Die Ordnung von* $\mathrm{U}_{2n}$ *ist* $q^{n^2}$.

*Beweis:* Sei $M \in \mathrm{U}_{2n}$. Dann hat $M$ die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

mit Untermatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $C = (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, wobei zwischen den Spalten von A,B und C folgende nichttriviale Beziehungen gelten:

$$A_k B_l' = 0 \text{ für } k = 2, \ldots, n \text{ und } l > n+1-k, \tag{1}$$

$$C_k B_l' - C_l B_k' = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n-1 \text{ und } l > k. \tag{2}$$

In Matrixschreibweise ergeben sich also die folgenden beiden Gleichungssysteme:

$$\begin{pmatrix} {B_n'}^T & & & \\ & {B_n'}^T & & \\ & {B_{n-1}'}^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & {B_n'}^T \\ & & & {B_{n-1}'}^T \\ & & & \vdots \\ & & & {B_2'}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ A_n \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} {B_2'}^T & -{B_1'}^T & & & \\ {B_3'}^T & & -{B_1'}^T & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ {B_n'}^T & & & & -{B_1'}^T \\ & {B_3'}^T & -{B_2'}^T & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & {B_n'}^T & & & -{B_2'}^T \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ & & {B_{n-1}'}^T & -{B_{n-2}'}^T & \\ & & {B_n'}^T & & -{B_{n-2}'}^T \\ & & & {B_n'}^T & -{B_{n-1}'}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ \\ C_n \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

Bei gegebenem $B$ ist Gleichung (3) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem vom Rang $n(n-1)/2$ in den $n(n-1)/2$ Unbekannten $a_{ij}, j > i$, so daß $A$ durch $B$ vollständig bestimmt wird. Gleichung (4) ist dagegen ein lineares

Gleichungssystem vom Rang $n(n-1)/2$ in den $n^2$ Unbekannten $c_{ij}$. Daher sind bei festem $B$ $n(n+1)/2$ der $c_{ij}$'s nicht festgelegt.

Also ist die Ordnung von $\mathrm{U}_{2n}$ gerade $q^{n(n-1)/2}q^{n(n+1)/2} = q^{n^2}$. $\square$

Zur Bestimmung des $f$-Vektors von $\Delta$ müssen wir auch die Ordnung der Fixgruppen von Simplizes in $\mathrm{U}_{2n}$ bestimmen. Wir führen noch folgende Notation ein: Für ein festes $i \in \{1, \dots, n\}$ und einen Vektor $v \in \mathbb{F}_q^n$ sei $v^{(1)} = (v_1, \dots, v_i)$ und $v^{(2)} = (v_{i+1}, \dots, v_n)$.

Sei $\sigma$ ein Simplex in $\mathcal{C}$ mit $\sigma = \{\langle f_1, \dots, f_i\rangle < \sigma'\}$. Da in allen Vertizes von $\sigma'$ der Aufspann von $\{f_1, \dots, f_i\}$ enthalten ist, können wir $\sigma'$ auch als Simplex in $\{\langle f_{i+1}\rangle < \cdots < \langle f_{i+1}, \dots, f_n\rangle\}$ auffassen.

**Lemma 2.2.2** *Die Ordnung von* $N_{\mathrm{U}_{2n}}(\sigma)$ *ist* $q^{i(i-1)/2}\#N_{\mathrm{U}_{2(n-i)}}(\sigma')$.

*Beweis:* Wir betrachten ein Element

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2n}}(\sigma).$$

Da $M$ insbesondere $\langle f_1, \dots, f_i\rangle$ stabilisiert, gilt $C_k = 0$ für $k = n-i+1, \dots, n$ sowie $B_k'^{(2)} = 0$ für $k = n-i+1, \dots, n$. Da $A_k B_l' = 0$ für $k = 2, \dots, n$ und $l > n+1-k$ (Gleichung (1)), folgt für $k = 2, \dots, i$ und $l > n+1-k \geq n+1-i$

$$A_k^{(1)} B_l'^{(1)} = 0 \tag{5}$$

und für $k = i+1, \dots, n$; $n+1-k < l \leq n-i$

$$A_k^{(2)} B_l'^{(2)} = 0. \tag{6}$$

Ähnlich erhalten wir aus $C_k B_l' - C_l B_k' = 0$ für $k = 1, \dots, n-1$ und $l > k$ (Gleichung (2))

$$C_k^{(2)} B_l'^{(2)} - C_l^{(2)} B_k'^{(2)} = 0 \tag{7}$$

für $k = 1, \dots, n-i$ und $k < l \leq n-i$ sowie

$$C_k^{(1)} B_l'^{(1)} = 0 \tag{8}$$

für $k = 1, \ldots, n-i$ und $l \geq n-i+1$. Die Gleichungen (6) und (7) zeigen, daß die Untermatrix

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} & c_{i+1,1} & \cdots & c_{i+1,n-i} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n,n} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n-i} \\ & & & 1 & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-i} \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & b_{n-i,n-i} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

unipotent in $\mathrm{Sp}_{2(n-i)}(\mathbb{F}_q)$ ist.

Aus den Gleichungen (5) und (8) folgt, daß die Einträge außerhalb von $M_i$ nur untereinander in Abhängigkeit stehen und zwar in folgender Weise: (8) impliziert $C_k^{(1)} = 0$ für $k = 1, \ldots, n-i$, denn bei festgelegtem $B$ bilden die Gleichungen (8) ein homogenes Gleichungssystem vom Rang $i(n-i)$ in den $i(n-i)$ Unbekannten $c_{jk}$ für $j = 1, \ldots, i$ und $k = 1, \ldots, n-i$. Die Gleichungen (5) bestimmen dagegen bei festgelegtem $B$ alle außerhalb von $M_i$ gelegenen Koeffizienten von $A$. Damit ist die Ordnung der Fixgruppe von $\langle f_1, \ldots f_i \rangle$ gerade $q^{i(i-1)/2} \# \mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2(n-i)}}(\sigma')$. $\square$

Mithilfe der vorangegangenen beiden Lemmata können wir nun auch eine Rekursionsformel für den $f$-Vektor von $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$ herleiten.

**Satz 2.2.3** *Wir setzen $f(0;q)_{-1} := 1$. Für den $f$-Vektor*

$$f(n;q) = (f(n;q)_{-1}, \ldots, f(n;q)_{n-1})$$

*des $\mathcal{E}_n$ gegenüberliegenden Unterkomplexes $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$ gilt:*

$$\begin{aligned} f(n;q)_{-1} &= 1 \quad \textit{und} \\ f(n;q)_m &= \sum_{i=1}^{n-m} q^{(4n-3i+1)i/2} f(n-i;q)_{m-1} \end{aligned}$$

*für $m = 0, \ldots, n-1$.*

*Beweis:* Sei n=1. Da $\Delta_{C_1} = \Delta_{A_1}$, ist $f(1;q)_0 = q$ und andererseits $\sum_{i=1}^{1} q^{(4-3+1)/2} f(0;q)_{-1} = q$.

Sei nun $n > 1$ und o.B.d.A. sei $\mathcal{E}_n = \{\langle e_1\rangle < \cdots < \langle e_1, \ldots, e_n\rangle\}$. Eine transversale maximale Fahne zu $\mathcal{E}_n$ ist dann $\mathcal{C}_n = \{\langle f_1\rangle < \cdots < \langle f_1, \ldots, f_n\rangle\}$.

Sei $S_n^m$ die Menge der Simplizes der Dimension $m$ in $\mathcal{C}_n$. $S_n^m$ ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $S_n^m(i) = \{\sigma \in S_n^m \mid \sigma = \{\langle f_1, \ldots, f_i\rangle < \cdots\}\}$. Wir identifizieren wieder $S_n^m(i)$ mit $S_{n-i-1}^{m-1}$.

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
f(n;q)_m &= \sum_{\sigma \in S_n^m} \frac{\#\mathrm{U}_{2n}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2n}}(\sigma)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{\sigma \in S_n^m(i)} \frac{\#\mathrm{U}_{2n}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2n}}(\sigma)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-m} \sum_{\sigma' \in S_{n-i}^{m-1}} \frac{q^{i(2n-i)}\#\mathrm{U}_{2(n-i)}}{q^{(i-1)i/2}\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2(n-i)}}(\sigma')} \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} q^{(4n-3i+1)i/2} \sum_{\sigma \in S_{n-i}^{m-1}} \frac{\#\mathrm{U}_{2(n-i)}}{\#\mathrm{N}_{\mathrm{U}_{2(n-i)}}(\sigma')} \\
&= \sum_{i=1}^{n-m} q^{(4n+1-3i)i/2} f(n-i;q)_{m-1}.
\end{aligned}
$$

□

Als Korollar ergibt sich auch in diesem Fall eine Rekursionsformel für die Euler-Charakteristik:

**Korollar 2.2.4** *Wir setzen $\chi_0(q) := 0$. Für die Euler Charakteristik $\chi_n(q)$ von $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$ für $n > 0$ gilt dann*

$$\chi_n(q) = \sum_{i=1}^{n} q^{(4n-3i+1)/2}\Big(1 - \chi_{n-i}(q)\Big).$$

*Beweis:* Für $n = 1$ ist die Gleichung offenbar richtig. Für $n > 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\chi_n(q) &= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m f(n;q)_m \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \sum_{i=1}^{n-m} q^{(4n-3i+1)/2} f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \sum_{i=1}^{n} q^{(4n-3i+1)/2} f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{(4n-3i+1)/2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m f(n-i;q)_{m-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{(4n-3i+1)/2} \left(1 - \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} f(n-i;q)_{m-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^{(4n-3i+1)/2} \Big(1 - \chi_{n-i}(q)\Big).
\end{aligned}$$

□

Mit der soeben hergeleiteten Formel für $\chi_n(q)$ und Lemma 2.0.1 ergeben sich ebenso wie im letzten Abschnitt über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ eine ganze Reihe nicht sphärischer Unterkomplexe vom Typ $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$.

Die Abbildung 5 auf der folgenden Seite wurde mit den bereits im letzen Abschnitt benutzten und hier entsprechend modifizierten Programmen `chi` und `chartest` erzeugt (siehe Anhang A.1). Sie zeigt die Vorzeichen von $(-1)^{n-1}(\chi_n(q) - 1)$ für $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$ über $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$. Für größere Körper sind auch in diesem Fall keine negativen Vorzeichen in dem betrachteten Rangbereich aufgetreten. Zusammenfassend ergibt sich also das

**Resultat:**

1. *Die zu einer Kammer $\mathcal{E}_n$ transversalen Unterkomplexe in Gebäuden vom Typ $C_n$ über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ im Rangbereich von $n = 3$ bis $250$ sind in großer Zahl nicht sphärisch.*

2. *Über $\mathbb{F}_3$ ist der kleinste, bisher bekannte nicht-sphärische Komplex $\Delta^0_{C_9}(\mathcal{E}_9)$, über $\mathbb{F}_2$ ist dies $\Delta^0_{C_3}(\mathcal{E}_3)$.*

3. *Die Euler-Charakteristik liefert im Rangbereich $n = 3$ bis $n = 250$ keine Gegenbeispiele für nicht sphärische Komplexe über den Körpern $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_5$.*

**Abb. 5**

Vorzeichen von $(-1)^{n-1}(\chi_n(q)-1)$ für $\Delta^0_{C_n}(\mathcal{E}_n)$ über $\mathbb{F}_q$

| $n$ | $q=2$ | $q=3$ | $n$ | $q=2$ | $q=3$ | $n$ | $q=2$ | $q=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 35 | −1 | −1 | 68 | −1 | 1 |
| 3 | −1 | 1 | 36 | 1 | −1 | 69 | −1 | 1 |
| 4 | −1 | 1 | 37 | 1 | −1 | 70 | −1 | 1 |
| 5 | −1 | 1 | 38 | 1 | −1 | 71 | −1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 39 | −1 | −1 | 72 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 40 | −1 | −1 | 73 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 41 | −1 | −1 | 74 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | −1 | 42 | −1 | −1 | 75 | 1 | 1 |
| 10 | −1 | −1 | 43 | 1 | 1 | 76 | −1 | 1 |
| 11 | −1 | −1 | 44 | 1 | 1 | 77 | −1 | −1 |
| 12 | −1 | −1 | 45 | 1 | 1 | 78 | −1 | −1 |
| 13 | −1 | −1 | 46 | −1 | 1 | 79 | 1 | −1 |
| 14 | 1 | −1 | 47 | −1 | 1 | 80 | 1 | −1 |
| 15 | 1 | −1 | 48 | −1 | 1 | 81 | 1 | −1 |
| 16 | 1 | −1 | 49 | −1 | 1 | 82 | 1 | −1 |
| 17 | −1 | −1 | 50 | 1 | 1 | 83 | −1 | −1 |
| 18 | −1 | −1 | 51 | 1 | 1 | 84 | −1 | −1 |
| 19 | −1 | −1 | 52 | 1 | 1 | 85 | −1 | −1 |
| 20 | −1 | −1 | 53 | 1 | 1 | 86 | 1 | −1 |
| 21 | 1 | 1 | 54 | −1 | 1 | 87 | 1 | −1 |
| 22 | 1 | 1 | 55 | −1 | −1 | 88 | 1 | −1 |
| 23 | 1 | 1 | 56 | −1 | −1 | 89 | 1 | 1 |
| 24 | 1 | 1 | 57 | 1 | −1 | 90 | −1 | 1 |
| 25 | −1 | 1 | 58 | 1 | −1 | 91 | −1 | 1 |
| 26 | −1 | 1 | 59 | 1 | −1 | 92 | −1 | 1 |
| 27 | −1 | 1 | 60 | 1 | −1 | 93 | −1 | 1 |
| 28 | 1 | 1 | 61 | −1 | −1 | 94 | 1 | 1 |
| 29 | 1 | 1 | 62 | −1 | −1 | 95 | 1 | 1 |
| 30 | 1 | 1 | 63 | −1 | −1 | 96 | 1 | 1 |
| 31 | 1 | 1 | 64 | −1 | −1 | 97 | −1 | 1 |
| 32 | −1 | −1 | 65 | 1 | −1 | 98 | −1 | 1 |
| 33 | −1 | −1 | 66 | 1 | 1 | 99 | −1 | 1 |
| 34 | −1 | −1 | 67 | 1 | 1 | 100 | −1 | −1 |

## 2.3 Das Kriterium von Björner und Kalai

Die in den letzten Abschnitten betrachtete Euler-Charakteristik lieferte (jedenfalls im auswertbaren Bereich) nur Beispiele für nicht-sphärische Komplexe über $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$. Neben dieser Formel existieren jedoch weitere von Björner und Kalai [BK1] bewiesene Beziehungen zwischen den Betti-Zahlen und dem $f$-Vektor eines Simplizialkomplexes, die wir nun zu einem verfeinerten Test heranziehen wollen.

Bevor wir diese Relationen benutzen können, benötigen wir noch eine zahlentheoretische Funktion.

Seien $n, k \geq 1$. Dann existiert eine eindeutige Darstellung

$$n = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_i}{i},$$

so daß $a_k > a_{k-1} > \cdots > a_i \geq i \geq 1$ (siehe z.B. [An, Theorem 7.2.1]). Die $a_i$ lassen sich folgendermaßen berechnen: Man wähle $a_k$ als das Maximum der Zahlen $l$, so daß $\binom{l}{k} \leq n$, dann $a_{k-1}$ als das Maximum der Zahlen $l$, so daß $\binom{l}{k-1} \leq n - \binom{a_k}{k}$ usw.

Wir definieren dann $\partial_{k-1}(0) := 0$ und

$$\partial_{k-1}(n) := \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \ldots \binom{a_i}{i-1},$$

Es gilt nun:

**Satz 2.3.1** *[BK1, Theorem 1.1, Theorem 6.1] $(f_0, \ldots, f_d)$ ist genau dann der $f$-Vektor eines $d$-dimensionalen Simplizialkomplexes mit Betti-Zahlen $(\beta_0, \ldots, \beta_d)$, wenn*

*(i)* $\chi_{-1} = 1$,

*(ii)* $\chi_i \geq 0$ *für* $0 \leq i \leq d-1$ *und* $\partial_i(\chi_i + \beta_i) \leq \chi_{i-1}$ *für alle* $i = 1, \ldots, d$,

*wobei* $\chi_{i-1} = \sum_{j \geq i} (-1)^{j-i}(f_j - \beta_j), i \geq 0$.

Die Bedingung (i) ist die bereits zitierte Euler-Poincaré Formel. Als Korollar erhalten wir einen Test auf Sphärizität:

**Korollar 2.3.2** *[BK2, Corollary 3]* $(f_0, f_1, \ldots, f_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ *ist genau dann der* $f$*-Vektor eines Simplizialkomplexes mit Betti-Zahlen* $\beta_d = k$ *und* $\beta_i = 0$ *für alle* $i < d$*, wenn*

*(i)* $\sum\limits_{j=0}^{d-1} (-1)^j f_j + (-1)^d (f_d - k) = 1,$

*(ii)* $\sum\limits_{j=i+1}^{d-1} (-1)^{j-i-1} f_j + (-1)^d (f_d - k) \geq 0$ *und*
$$\partial_i \left( \sum_{j=i+1}^{d-1} (-1)^{j-i-1} f_j + (-1)^d (f_d - k) \right) \leq \sum_{j=i}^{d-1} (-1)^{j-i} f_j + (-1)^d (f_d - k)$$
*für* $i = 1, \ldots, d-1$*,*

*(iii)* $\partial_d(k) \leq f_d - k$*.*

Die computerunterstützte Auswertung des Kriteriums von Björner und Kalai ist durch die wiederholte Notwendigkeit der Berechnung der $\partial$ Abbildung erheblich rechenintensiver, so daß sie nur in beschränktem Umfang im Vergleich zur Berechnung der Euler-Charakteristik möglich ist.

Das in Anhang A.2 aufgeführte Mathemetica-Programm `bjkaltest` überprüft nach erfolgter Berechnung des $f$-Vektors eines Komplexes, ob alle Eigenschaften aus Korollar 2.3.2 erfüllt sind.

Das geschieht folgendermaßen: Wir gehen zunächst von 2.3.2 (i), d.h. der Euler-Poincaré Formel aus und berechnen $k$, d.h. bei einem sphärischen Komplex die Anzahl seiner paarweise nicht zueinander homotopen Sphären. Anschließend wird dieser Wert für $k$ benutzt, um die Bedingungen (ii) und (iii) aus 2.3.2 zu überprüfen.

Schließlich werden die Ergebnisse eines Laufs für einen bestimmten Rang als Zahlenliste zusammengefaßt, die folgendes bedeutet: Eine negative Zahl in der Liste zeigt an, daß eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt ist, d.h. der entsprechende Komplex nicht sphärisch ist, wobei an der ersten Stelle im Programmresultat durch eine $-2$ angezeigt wird, daß $k$ nicht positiv ist, d.h. daß das bereits ausgewertete Euler-Charakteristik-Kriterium schon eine Antwort liefert.

In Abbildung 7 finden sich die Ergebnisse eines Programmlaufs von `bjkaltest` für $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E})$ über $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_4$. Aufgrund von Kapazitätsproblemen war eine weitere Auswertung für höhere Ränge als $n = 18$ nicht mehr möglich; mit wachsender Körpergröße nimmt der überprüfbare Rangbereich sogar immer mehr ab.

Die Resultate in Abbildung 7 zeigen beispielhaft, daß über die hier erneut mit der Euler-Charakteristik berechneten Gegenbeispiele hinaus keine weiteren nicht-sphärischen Komplexe im niedrigen Rangbereich zu ermitteln sind. Weitere Durchläufe des Programms mit größeren Körpern (bis $\mathbb{F}_9$) und im $C_n$-Fall haben dieses Ergebnis bestätigt.

**Abb. 7**

Ergebnisse von `bjkaltest` für $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$ über $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_4$

| $n$ | $K = \mathbb{F}_2$ |
|---|---|
| 3 | $\{-2, 1\}$ |
| 4 | $\{-2, 1, 1\}$ |
| 5 | $\{-2, 1, 1, 1\}$ |
| 6 | $\{-2, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 7 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 8 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 9 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 10 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 11 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 12 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 13 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 14 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 15 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 16 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 17 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 18 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |

| $n$ | $K = \mathbb{F}_3$ | $K = \mathbb{F}_4$ |
|---|---|---|
| 3 | $\{1, 1\}$ | $\{1, 1\}$ |
| 4 | $\{1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1\}$ |
| 5 | $\{1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |
| 6 | $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 7 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 8 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 9 | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 10 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 11 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 12 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 13 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 14 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ |
| 15 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | |
| 16 | $\{-2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ | |

# 3 Allgemeine Lage

## 3.1 Neue Sphärizitätsbeweise

Die Ergebnisse aus Kapitel 3 könnten als Indiz für die Vermutung gewertet werden, daß Ausnahmen von der Sphärizität nur über den Körpern $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ auftreten. Da der Beweis von Abels und Abramenko sich in dieser Richtung aber nicht verbessern läßt, liegt der Versuch nahe, mit einer anderen Methode eine bessere Grenze zu beweisen.

Die in diesem Kapitel benutzte Idee besteht darin, die „allgemeine Lage" von $\Delta^0(E)$ zu verwenden, d.h. die Tatsache auszunutzen, daß sich $\Delta^0(E)$ für große Körper nicht wesentlich von $\Delta$ unterscheidet. Die Ausführung dieser Beweisidee wird jedoch dadurch erschwert, daß sich die Ähnlichkeit zwar auf die Größe, nicht aber auf die Struktur dieser Komplexe bezieht. Trotzdem kann man einige der bereits bekannten Ergebnisse für große Körper mit dieser Methode bestätigen.

Wir betrachten in diesem Kapitel Unterkomplexe in Gebäuden vom Typ $A_n$. Sei also $V$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $K$ und $\Delta = \Delta_{A_n}$ das zugehörige Gebäude, d.h. der Fahnenkomplex der echten nichttrivialen Unterräume von $V$.

Nützlich zur Berechnung der Homotopieeigenschaften von Simplizialkomplexen ist der sogenannte Faserungssatz von Quillen, den wir in diesem Abschnitt benutzen werden. Unter den topologischen Eigenschaften einer partiell geordneten Menge sind hier wieder die toplogischen Eigenschaften des von ihr gebildeten Fahnenkomplexes zu verstehen.

**Satz 3.1.1** *(siehe [Qu2, Theorem A] oder [Bj2, 10.5]) Sei $f : X \to Y$ eine ordnungserhaltende Abbildung von partiell geordneten Mengen und $y \in Y$. Ferner seien*

$$\begin{aligned} f/y &= \{x \in X \mid f(x) \leq y\} \\ y\backslash f &= \{x \in X \mid f(x) \geq y\} \end{aligned}$$

*die sogenannten* **Fasern** *von $f$. Dann gilt:*

- *Falls $f/y$ (bzw. $y\backslash f$) für alle $y \in Y$ kontrahierbar ist, so ist $f$ eine Homotopieäquivalenz zwischen $X$ und $Y$.*
- *Falls $f/y$ (bzw. $y\backslash f$) für alle $y \in Y$ $k$-zusammenhängend ist, so ist $X$ genau dann $k$-zusammenhängend, wenn $Y$ $k$-zusammenhängend ist.*

Der einfachste zu betrachtende Fall ist der zu einer oder mehrerer Hyperebenen transversale Unterkomplex, da der Aufspann zweier transversaler Geraden in diesem Fall wieder transversal ist. Diese Eigenschaft ist im allgemeinen natürlich nicht erfüllt.

Die in [AA] angegebene Grenze für die Größe des Körpers beinhaltet in diesem Fall für eine Menge $\mathfrak{H}$ von Hyperebenen, daß $q \geq \#\mathfrak{H}$ sein muß. Im folgenden wollen wir zunächst zeigen, daß diese Grenze nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist.

**Lemma 3.1.2** *Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Dann ist die minimale Anzahl von Hyperebenen, deren Vereinigung $V$ überdeckt, $q+1$.*

*Beweis:* Wir zeigen zunächst, daß sich $V$ durch $q+1$ Hyperebenen überdecken läßt. Sei $W$ ein Unterraum der Kodimension 2 in $V$ und $\mathfrak{H}$ die Menge der Hyperebenen, die $W$ enthalten. Dann gilt offensichtlich: $V = \bigcup\limits_{H \in \mathfrak{H}} H$ und $\#\mathfrak{H} = \#\{\text{Geraden in } V/W\} = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = q+1$.

Zum Beweis der Minimalität sei $H_1, \ldots, H_r$ eine beliebige Menge von $r$ Hyperebenen in $V$ und $n = \dim(V)$. Wir zeigen nun folgende Behauptung: Für die Anzahl der Vektoren in $\bigcup\limits_{i=1}^{r} H_i$ gilt:

$$\#\bigcup_{i=1}^{r} H_i \leq q^{n-1} + (r-1)(q^{n-1} - q^{n-2}).$$

Der Fall $r = 1$ ist klar, denn eine Hyperebene enthält $q^{n-1}$ Vektoren. Falls $r > 1$, so folgt

$$\begin{aligned}
\#\bigcup_{i=1}^{r} H_i &= \#\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} H_i \cup H_r\right) \\
&= \#\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} H_i\right) + \#H_r - \#\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} H_i \cap H_r\right) \\
&\leq q^{n-1} + (r-2)(q^{n-1} - q^{n-2}) + q^{n-1} - q^{n-2} \\
&= q^{n-1} + (r-1)(q^{n-1} - q^{n-2}),
\end{aligned}$$

denn da $H_r \cap \bigcup\limits_{i=1}^{r-1} H_i$ mindestens einen Unterraum mit Kodimension 2 enthält, gilt $\#(\bigcup\limits_{i=1}^{r=1} H_i \cap H_r) \geq q^{n-2}$.

Also ergibt sich für $r < q+1$

$$\# \bigcup_{i=1}^{r} H_i < q^{n-1} + q(q^{n-1} - q^{n-2}) = q^n.$$

$\square$

Als direkte Konsequenz aus diesem Lemma erhalten wir

**Korollar 3.1.3** *Das Maximum der Zahlen $k$, so daß je $k$ beliebig gewählte Hyperebenen $V$ nicht überdecken, ist $q$.*

Somit ist gezeigt, daß die in [AA] angegebene Grenze zumindest in diesem Fall nicht verbessert werden kann.

Der Faserungssatz von Quillen bietet nun die Möglichkeit, die Sphärizität von $\Delta^0(\mathfrak{H})$ auf eine anschauliche Art zu beweisen. Der Ausgangspunkt dabei ist der aus der Menge der transversalen Geraden gebildete zusammenziehbare Simplizialkomplex.

**Satz 3.1.4** *Sei $V$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $K$. Sei $\mathfrak{H}$ eine endliche Menge von Hyperebenen in $V$ mit $\#\mathfrak{H} \leq q$, falls $K = \mathbb{F}_q$. Dann ist $\Delta^0(\mathfrak{H})$ $(n-1)$-sphärisch.*

*Beweis:* Sei $\Sigma$ der volle Simplizialkomplex über der Vertexmenge der transversalen Geraden, d.h. in diesem Fall der Geraden in $V \setminus \bigcup_{H \in \mathfrak{H}} H$. $\Sigma$ ist als voller Komplex offenbar kontrahierbar, so daß das $(n-1)$-Gerüst $\Sigma^{n-1}$ von $\Sigma$ $(n-2)$-zusammenhängend ist. Sei nun $P(\Sigma^{n-1})$ die zugehörige partiell geordnete Menge der Simplizes und $T(\mathfrak{H})$ die Menge der transversalen Unterräume, d.h. die partiell geordnete Menge der Vertizes von $\Delta^0(\mathfrak{H})$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} f : P(\Sigma^{n-1}) & \rightarrow & T(\mathfrak{H}) \\ \sigma & \mapsto & \langle \sigma \rangle \end{array}$$

eine ordnungserhaltende Abbildung zwischen partiell geordneten Mengen. Die Faser eines transversalen Unterraumes $U \in T(\mathfrak{H})$ ist ebenfalls $(n-2)$-zusammenhängend, denn

$$f/U = \{\sigma \in P(\Sigma^{n-1}) \mid \langle \sigma \rangle \subseteq U\}$$

d.h. $f/U$ ist das $(n-2)$-Gerüst des vollen Simplizialkomplexes über allen transversalen Geraden in $U$. Nach Quillens Faserungssatz ist $\Delta^0(\mathfrak{H})$ also $(n-2)$-zusammenhängend und damit $(n-1)$-sphärisch. $\square$

**Korollar 3.1.5** *Der vorstehende Beweis liefert für den Fall* $\mathfrak{H} = \emptyset$ *den klassischen Satz von Solomon und Tits für Gebäude vom Typ* $A_n$.

**Korollar 3.1.6** *Satz 3.1.4 ist ebenfalls gültig, wenn* $\mathfrak{H}$ *durch eine entsprechende Menge von Geraden ersetzt wird.*

*Beweis:* (siehe [AA, 2.5]) Es gilt allgemein: Sei $V^*$ der Dualraum von $V$ und für ein $U \subseteq V$ sei $U^\perp$ der zu U orthogonale Raum in $V^*$. Dann wird durch $U \mapsto U^\perp$ ein Homöomorphismus der Fahnenkomplexe $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E})$ und $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}^\perp)$ induziert, denn diese Abbildung ist eine ordnungsumkehrende Bijektion zwischen den partiell geordneten Mengen der transversalen Unterräume zu $\mathcal{E}$ in $V$ und $\mathcal{E}^\perp$ in $V^*$. □

Um die obige Beweisidee auf den allgemeinen Fall eines Unterkomplexes zu übertragen, der zum Beispiel einem beliebigen Vertex, d.h. einem Unterraum beliebiger Dimension gegenüberliegt, müssen wir erheblich mehr Vorarbeit leisten, denn hier ist die entscheidende Eigenschaft, daß zwei tranversale Geraden einen transversalen Unterraum aufspannen, nicht erfüllt.

Die bereits oben angedeutete Idee besteht darin, nicht alle Mengen von transversalen Geraden zu betrachten, sondern die Eigenschaften eines Simplizialkomplexes von Mengen von Geraden in „allgemeiner Lage“ auszunutzen, der sich von dem vollen Komplex nur wenig unterscheidet. Bei der Beweisführung benötigt man jedoch so viel „Spielraum“, daß sich eine solche Argumentation nur im Fall unendlicher Körper durchführen läßt. Angelehnt an eine vergleichbare Strategie in [AB, 3.5] zeigen wir im folgenden Lemma zunächst, welche Voraussetzungen ein Unterkomplex in „allgemeiner Lage“ erfüllen sollte, um ähnliche Homotopieeigenschaften wie der volle Komplex zu besitzen.

**Lemma 3.1.7** *Sei* $\Sigma$ *der volle Simplizialkomplex über einer Vertexmenge* $\mathfrak{V}$, *und sei* $\tilde{\Sigma}$ *ein Unterkomplex von* $\Sigma$, *so daß gilt:*

*(i) Für jede endliche Teilmenge* $\sigma \subseteq \mathfrak{V}$, *d.h. für jeden Simplex* $\sigma$ *endlicher Dimension in* $\Sigma$ *existiert eine Abbildung*

$$f \;:\; \sigma \;\rightarrow\; \tilde{\sigma}$$

*mit* $\tilde{\sigma} \in \tilde{\Sigma}$.

*(ii) Für alle Simplizes* $\tau \in \tilde{\Sigma}|_\sigma$ *ist auch* $\tau \cup f(\tau)$ *in* $\tilde{\Sigma}$.

*Dann ist* $\tilde{\Sigma}$ *kontrahierbar.*

*Beweis:* Es bezeichne $S^j$ die $j$-dimensionale Einheitssphäre, und $g : S^j \to \tilde{\Sigma}$ sei ein Repräsentant eines Elementes der $j$-ten Homotopiegruppe von $\tilde{\Sigma}$. Weiter sei $i : \tilde{\Sigma} \to \Sigma$ die Einbettung von $\tilde{\Sigma}$ in $\Sigma$. Da $\Sigma$ zusammenziehbar ist, ist die Abbildung

$$i \circ g : S^j \to \tilde{\Sigma} \to \Sigma$$

nullhomotop. Nun ist $S^j$ kompakt, so daß die zugehörige Nullhomotopie ein kompaktes Bild in $\Sigma$ hat, das in einem Unterkomplex $\Sigma|_\sigma$ für ein endliches $\sigma$ liegt. Durch Anwenden von $f$ erhalten wir, daß

$$f \circ i \circ g : S^j \to \tilde{\Sigma}|_\sigma \to \Sigma|_\sigma \to \tilde{\Sigma}|_{\tilde{\sigma}}$$

nullhomotop ist. Aus der zweiten Voraussetzung folgt nun, daß $g$ homotop zu $f \circ i \circ g$ ist, d.h. $g$ ist nullhomotop. □

Wir wollen nun konkreter benennen, was wir unter „allgemeiner Lage" verstehen wollen, und den angekündigten Sphärizitätsbeweis für den einem Simplex gegenüberliegenden Unterkomplex in $A_n$-Gebäuden führen. Im folgenden sei $V$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über einem unendlichen Körper $K$ und $E$ ein echter Teilraum von $V$.

**Definition 3.1.8** *Eine Menge $\sigma$ von zu $E$ transversalen Geraden heiße in „allgemeiner Lage bzgl. $E$", falls jede Teilmenge $\tau \subseteq \sigma$ mit Kardinalität $\#\tau \leq n$ einen transversalen Unterraum aufspannt.*

**Lemma 3.1.9** *Sei $\Sigma$ der volle Simplizialkomplex über der Vertexmenge der transversalen Geraden, d.h. der Geraden, die nicht in $E$ enthalten sind. Mit $\tilde{\Sigma}$ sei der Unterkomplex aller Simplizes in allgemeiner Lage bezeichnet.*

*Dann ist $\tilde{\Sigma}$ kontrahierbar.*

*Beweis:* Wir zeigen per Induktion nach der Dimension der endlichen Simplizes von $\Sigma$ die Gültigkeit der Voraussetzungen aus Lemma 3.1.7.

Für $\dim \sigma = 0$ ist die Behauptung klar.

Sei $\sigma \in \Sigma$ und die Voraussetzungen aus Lemma 3.1.7 seien für alle $\tau \in \Sigma$ mit $\dim \tau < \dim \sigma$ gezeigt. Außerdem sei $\sigma' := \sigma \backslash \{l\}$ für ein $l \in \sigma$, d.h. nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Abbildung $h : \sigma' \to \omega$ mit $\omega \in \tilde{\Sigma}$ und $\tau \cup h(\tau) \in \tilde{\Sigma}$ für alle $\tau \in \tilde{\Sigma}|_{\sigma'}$.

Wir betrachten nun den Unterkomplex

$$\tilde{\Sigma}|_{\sigma' \cup \omega}$$

und fixieren einen komplementären Unterraum $E^\perp$ zu $E$. Weiterhin sei

$$\mathfrak{W} = \{W = \langle\tau\rangle \mid \tau \in \tilde{\Sigma}|_{\sigma'\cup\omega},\ \dim\langle\tau\rangle < \dim E^\perp\}.$$

Die Vereinigung der Projektionen der Unterräume $W \in \mathfrak{W}$ auf $E^\perp$ überdeckt nicht ganz $E^\perp$, da der Körper $K$ unendlich ist. Also existiert eine Gerade $\tilde{l} \subseteq E^\perp \setminus \bigcup_{W\in\mathfrak{W}} \mathrm{proj}_{E^\perp}(W)$, und wir setzen

$$\tilde{\sigma} := \omega \cup \{\tilde{l}\}$$

sowie

$$\begin{aligned} g : \sigma &\to \tilde{\sigma} \\ x &\mapsto \begin{cases} h(x), & \text{falls} \quad x \in \sigma', \\ \tilde{l}, & \text{falls} \quad x = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion spannt $\tilde{l}$ mit allen Teilmengen von $\omega$ der Kardinalität $< \dim E^\perp$ einen transversalen Raum auf und damit mit allen Teilmengen von $\omega$ der Kardinalität $\leq n-1$. Also ist $\tilde{\sigma}$ tatsächlich in $\tilde{\Sigma}$. Ähnlich folgt nach der Konstruktion von $\tilde{\sigma}$, daß $\tau \cup g(\tau) \in \tilde{\Sigma}$ für alle $\tau \in \tilde{\Sigma}|_\sigma$. □

**Satz 3.1.10** *$\Delta^0(E)$ ist $(n-1)$-sphärisch.*

*Beweis:* Seien $\Sigma$ und $\tilde{\Sigma}$ gewählt wie im Lemma 3.1.9. Da $\tilde{\Sigma}$ zusammenziehbar ist, ist das $(n-1)$-Gerüst von $\tilde{\Sigma}$ $(n-2)$-zusammenhängend, und wir definieren wie in Satz 3.1.4 eine Abbildung $f$ zwischen der partiell geordneten Menge der Simplizes von $\tilde{\Sigma}^{n-1}$ und $T(E)$:

$$\tilde{\sigma} \mapsto f(\tilde{\sigma}) = \langle\tilde{\sigma}\rangle.$$

Die Faser eines Unterraumes $U \in T(E)$ ist dann

$$f/U = \{\tau \in P(\tilde{\Sigma}^{n-1}) \mid \langle\tau\rangle \subseteq U\},$$

d.h. $f/U$ ist das $(n-1)$-Gerüst des Simplizialkomplexes, der aus den in allgemeiner Lage befindlichen Teilmengen von transversalen Geraden in $U$ besteht. Dieser Komplex ist aber ebenfalls zusammenziehbar, denn $U$ als Vektorraum und der echte Unterraum $E \cap U$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 3.1.9. □

## 3.2 Überdeckung durch Apartments

Im Hinblick auf strukturelle Aussagen über die transversalen Komplexe drängt sich unmittelbar die Frage auf, unter welchen Umständen volle Apartments in den Komplexen zu finden sind. Die Antwort auf diese Frage liefert der

**Satz 3.2.1** *Sei $\sigma = \{E_1 < \cdots < E_p\}$ ein Simplex in $\Delta = \Delta_{A_n}$. Falls $q \geq n+1$, wird $\Delta^0(\sigma)$ von (in $\Delta^0(\sigma)$ liegenden) Apartments überdeckt.*

*Beweis:* O.B.d.A. sei $\sigma$ die Fundamentalkammer $\mathcal{E} = \{E_1, \dots E_n\}$ mit $E_i = \langle e_1, \dots e_i \rangle$. Da der Stabilisator von $\mathcal{E}$ in $\mathrm{Sl}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ transitiv auf den Kammern von $\Delta^0(\mathcal{E})$ wirkt, reicht es zu zeigen, daß die transversale Kammer $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ mit $C_i = \langle e_{n+1}, \dots e_{n+2-i} \rangle$ in einem Apartment $\Sigma$ enthalten ist, das ganz in $\Delta^0(\mathcal{E})$ liegt.

Wir müssen also die Existenz einer Menge von Geraden in allgemeiner Lage $L = \{l_1, \dots, l_{n+1}\}$ zeigen, die alle $C_i$ einschließlich $C_{n+1} := V$ erzeugt. Allgemeine Lage bedeutet hier wieder, daß der Aufspann jeder echten nichttrivialen Teilmenge von $L$ transversal zu allen Vertizes in $\sigma$ sein muß. Mit anderen Worten heißt dies, daß jede $i$-elementige Teilmenge von $L$ projiziert auf $C_i$ linear unabhängig in $C_i$ ist.

Dies ist wiederum gleichbedeutend mit der Existenz einer unteren Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n+1,1} & \cdots & m_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{F}_q),$$

mit $m_{i,j} = 0$ für $i < j$, so daß jede quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} m_{k_1,1} & \cdots & m_{k_1,l} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k_l,1} & \cdots & m_{k_l,l} \end{pmatrix}$$

für alle $l = 1, \dots, n+1$ und für alle $k_1 < \cdots < k_l \in \{1, \dots, n\}$ in $\mathrm{Gl}_l(\mathbb{F}_q)$ liegt.

Die von den Spalten dieser Matrix $M$ aufgespannten Geraden erfüllen dann die Eigenschaften von $L$.

Falls $q > n+1$ können wir eine Matrix $M$ dieser Art z.B. leicht aus der Vandermondeschen Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

mit paarweise verschiedenen $a_i \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ konstruieren. Sie besitzt die Determinante

$$\det(M') = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i - a_j),$$

und jede Matrix vom Typ

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{k_1} & a_{k_1}^2 & \cdots & a_{k_1}^{l-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & a_{k_l} & a_{k_l}^2 & \cdots & a_{k_l}^{l-1} \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls vom Vandermondeschen Typ, d.h. liegt in $\mathrm{Gl}_l(\mathbb{F}_q)$.

Durch elementare Spaltenumformungen läßt sich $M'$ in eine untere Dreiecksmatrix $M$ des gesuchten Typs überführen, wobei sich die Determinanten der betrachteten Teilmatrizen nicht ändern. $\square$

Vergleichen wir das von Abels und Abramenko bewiesene Kriterium für die Sphärizität mit dem obigen Kriterium für die Überdeckung durch Apartments, stellen wir z.B. für den einer Kammer gegenüberliegenden Komplex einen erheblichen Unterschied fest. Im ersten Fall steigt die Grenze für die Körpergröße exponentiell mit dem Rang ($q \geq 2^{n-1}$), im zweiten Fall nur linear. Daher liegt es nahe, die Überdeckungseigenschaft für einen Sphärizitätsbeweis auszunutzen, weil der Komplex in diesem Fall offensichtlich aus gut bekannten sphärischen Unterstrukturen zusammengesetzt ist.

Das Vorhandensein von Apartments allein scheint jedoch dafür noch nicht auszureichen. Im Beweis des Satzes von Solomon und Tits wird beispielsweise entscheidend die Voraussetzung verwendet, daß zwei beliebige Kammern immer in einem gemeinsamen Apartment liegen. Wie bereits in der Einleitung an einem Beispiel demonstriert wurde, ist dies in den transversalen Komplexen jedoch nicht der Fall. Ansätze, diese Voraussetzung abzuschwächen, haben bisher noch keine Ergebnisse erbracht.

# 4 Transversale Komplexe in $E_6$- und $F_4$-Gebäuden

## 4.1 $E_6$-Unterkomplexe

Die Modellierung der Ausnahme-Gebäude ist im Gegensatz zu den klassischen Gebäuden technisch aufwendiger. Wir beschränken uns hier auf die zu Chevalley-Gruppen des Typs $E_6$ und $F_4$ gehörigen Gebäude. Grob gesprochen sind diese Gruppen nicht als Isometriegruppen einer sondern mehrerer Bilinearformen bzw. quadratischer Formen darstellbar. Wir werden in diesem und dem nächsten Abschnitt eine Modellierung eines $E_6$- und eines $F_4$-Gebäudes angeben, die von Aschbacher [As1] erbracht wurde. Darauf aufbauend wird sich eine konkrete Beschreibung der gegenüberliegenden Unterkomplexe in diesen Modellen ergeben.

Zunächst benötigen wir eine Reihe von Notationen:

Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$, $\alpha$ eine symmetrische $m$-Linearform und $X = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von $V$. Dann ist $\alpha$ eindeutig bestimmt durch die Skalare $\alpha(y_1, \ldots, y_m)$, wobei $(y_1, \ldots, y_m)$ alle $m$-Tupel von $X$ durchläuft. Für $\alpha(y_1, \ldots, y_m) = a_{y_1} \ldots a_{y_m}$ schreiben wir abkürzend

$$\alpha = \sum_{y_1, \cdots, y_m} a_{y_1} \ldots a_{y_m} y_1 \ldots y_m.$$

Der Term $a_{y_1} \ldots a_{y_m} y_1 \ldots y_m$ heißt dann Monom von $\alpha$. Da $\alpha$ symmetrisch ist, zerfällt die Menge der Monome in Bahnen unter der symmetrischen Gruppe $S_m$, so daß wir bei Angabe der Monome nur einen Repräsentanten jeder Bahn auflisten.

Die Rolle der Bilinearform bzw. quadratischen Form in den klassischen Fällen wird nun von einer sogenannten 3-Form übernommen:

**Definition 4.1.1** *Eine 3-Form auf $V$ ist ein Tripel $\mathfrak{F} = (T, Q, f)$, für das gilt:*

*(1) $f$ ist eine Trilinearform auf $V$.*

*(2) $Q : V \times V \to K$ ist in der ersten Variablen linear und es gilt*

$$\begin{aligned} Q(x, ay) &= a^2 Q(x, y), \\ Q(x, y + z) &= Q(x, y) + Q(x, z) + f(x, y, z) \end{aligned}$$

*für alle $a \in K$ und $x, y, z \in V$.*

*(3) Für $T : V \to F$ gilt*

$$\begin{aligned} T(ax) &= a^3 T(x), \\ T(x+y) &= T(x) + T(y) + Q(x,y) \end{aligned}$$

*für alle $a \in K$ und $x, y \in V$.*

Es ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften einer 3-Form ([As1]):

(1) $f$ ist eine symmetrische Trilinearform.

(2) $Q$ kann identifiziert werden mit der linearen Familie $\{Q_x \mid x \in V\}$ von quadratischen Formen auf $V$, wobei $Q_x(y) = Q(x,y)$. Die zu $Q_x$ gehörige Bilinearform ist $f_x$, wobei $f_x(y,z) = f(x,y,z)$.

(2) zeigt, daß wir eine ganze Schar von quadratischen Formen definiert haben. Das Analogon zur Isotropie in den klassischen Fällen ist die sogenannte Singularität:

**Definition 4.1.2** *(1) Für $x \in V$ bezeichne $\delta(x)$ das Radikal der Bilinearform $f_x$ und für $U \leq V$ sei*

$$\delta(U) := \bigcap_{x \in U} \delta(x).$$

*(2) Für $U \leq V$ sei*

$$\vartheta(U) := \{v \in V \mid Q_v(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

*(3) $U \leq V$ heiße singulär, falls $U \subseteq \delta(U)$, und brilliant, falls $U \subseteq \vartheta(U)$.*

Für den Aufspann von singulären Unterräumen gilt nach [As1, 2.6,2.8] folgendes:

**Lemma 4.1.3** *(i) Seien $X$ und $Y$ verschiedene singuläre Geraden in $V$. Dann gilt entweder*

*(1) $X \leq \delta(Y)$, $X + Y$ ist singulär, und jede Gerade in $X + Y$ ist singulär, oder*

*(2) $X \not\leq Y$, $X + Y$ ist nicht singulär, und $X$ und $Y$ sind die einzigen singulären Geraden in $X + Y$.*

*(ii) Seien $Z_i \leq V$, $1 \leq i \leq n$, und sei $Z = \langle Z_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$. Dann ist $Z$ genau dann singulär, falls für jedes $i$ $Z_i$ singulär ist und $Z \leq \delta(Z_i)$ gilt.*

Eine Ebene, die die Bedingung (2) aus dem obigen Lemma erfüllt und briliant ist, heißt hyperbolisch. Allgemeiner wird ein Unterraum $W$ von $V$ hyperbolisch genannt, falls $W = \oplus W_i$ für hyperbolische Ebenen $W_i$ mit $W_i \leq \delta(W_j)$ für alle $i \neq j$ gilt.

Zur Darstellung der universellen Chevalley-Gruppe vom Typ $E_6$ sehen wir uns jetzt eine bestimmte 3-Form an, die sogenannte Dickson 3-Form:

Sei $V$ ein 27-dimensionaler Vektorraum über $K$ mit Basis

$$X = \{x_i, x_i', x_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 6, i < j\}.$$

Für $i < j$ sei $x_{j,i} = -x_{i,j}$. Sei $f$ die symmetrische Trilinearform mit Monomen

$$x_i x_j' x_{i,j} \text{ für } 1 \leq i, j \leq 6, i \neq j$$

und

$$x_{1d,2d}\, x_{3d,4d}\, x_{5d,6d} \text{ für } d \in \text{ Coset}.$$

Hier ist Coset eine Menge von Repräsentanten für die Nebenklassen von $\mathrm{Alt}_p$ in Alt, wobei $\mathrm{Alt}_p$ der Stabilisator der Partition

$$P = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\}$$

in der alternierenden Gruppe Alt von $\{1, \ldots, 6\}$ ist.

Die folgende Tabelle listet die Bilder von $\{1,2;3,4;5,6\}$ unter einer bestimmten Menge von Repräsentanten Coset auf, wobei für $\{i,j;k,l;m,n\}$ das Monom $x_{i,j}x_{k,l}x_{m,n}$ das Vorzeichen $+1$ in $f$ hat.

| | | |
|---|---|---|
| 12 34 56 | 14 23 56 | 16 25 34 |
| 12 35 64 | 14 25 63 | 16 23 45 |
| 12 36 45 | 14 26 35 | 16 24 53 |
| | | |
| 13 24 65 | 15 26 43 | |
| 13 26 54 | 15 24 36 | |
| 13 25 46 | 15 23 64 | |

Nach [As1, 2.14] existiert eine eindeutige 3-Form $\mathcal{F} = (T, Q, f)$, bezüglich der die Basis $X$ singulär und brilliant wird, und zwar setze man

$$Q(x,y) = \frac{1}{2} f(x,y,y) \text{ und } T(x) = \frac{1}{6} f(x,x,x).$$

Sei nun $G = O(V, \mathfrak{F})$ die Isometriegruppe von $\mathfrak{F}$, d.h. die Untergruppe von $\mathrm{Gl}(V)$, die $T$, $Q$ und $f$ invariant läßt.

Ferner betrachten wir die folgenden singulären Untervektorräume von $V$:

Für $1 \leq k \leq 6$, $k \neq 5$ sei

$$\begin{aligned} V_k &:= \langle x_1, \ldots, x_k \rangle, \\ V_k' &:= \langle x_1' \ldots x_k' \rangle, \\ V_5 &:= \langle x_1, \ldots, x_4, x_{5,6} \rangle, \\ V_{10} &:= \langle x_i, x_{6,i} \mid 1 \leq i \leq 5 \rangle. \end{aligned}$$

Sei $\Delta_{E_6}$ der Komplex, dessen Vertizes vom Typ $i$ die Bilder von $V_i$ unter $G$ für $i \in I = \{1, 2, 3, 5, 10, 6\}$ sind, d.h. dessen Kammern die Bilder von $\mathcal{C} = \{V_i \mid i \in I\}$ sind. Weiter sei $\hat{X} = \{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ und $\Sigma$ der Unterkomplex von $\Delta_{E_6}$, der von den Elementen in $\hat{X}$ erzeugt wird.

Aschbachers Ergebnisse aus Kapitel 5 und 6 in [As1] lassen sich nun in folgendem Satz zusammenfassen:

**Satz 4.1.4** *(i) Die Isometriegruppe $G = O(V, \mathfrak{F})$ der Form $\mathfrak{F}$ ist die universelle Chevalley Gruppe vom Typ $E_6$ über $K$ und $\Delta_{E_6}$ ist das zu $E_6(K)$ gehörige Gebäude.*

*(ii) Die Vertizes vom Typ $i$ im Gebäude $\Delta$ sind die $i$-dimensionalen singulären Unterräume von $V$, falls $i \neq 5, 10$. Die Vertizes vom Typ 5 sind die maximalen singulären Unterräume mit Dimension 5, und die Vertizes vom Typ 10 sind die maximalen hyperbolischen Unterräume. Inzidenz ist gleichbedeutend mit Inklusion, außer zwischen Vertizes vom Typ 6 mit denen vom Typ 5 oder 10. Dort gilt: Ein Vertex $U$ vom Typ 6 ist genau dann inzident mit einem Vertex $W$ vom Typ 5 bzw. 10, falls $U \cap W$ die Dimension 4 bzw. 5 besitzt.*

*(iii) Die Menge der Apartments von $\Delta_{E_6}$ ist die Menge der Bilder von $\Sigma$ unter $G$.*

*Beweis:* siehe [As1, Section 5 und 6].

Bei der Berechnung der Entgegengesetztheitsinvolution benutzen wir das folgende

**Lemma 4.1.5** *Sei $\Sigma = \Sigma(W, S)$ ein Coxeter-Komplex mit endlicher Weyl-Gruppe $W$. Ferner seien $x, y$ Vertizes von $\Sigma$, so daß $W_x(y) = y$. Dann gilt $x \operatorname{op} y$.*

*Beweis:* Da $W$ endlich ist, ist $W$ isomorph zu einer endlichen Spiegelungsgruppe eines Vektorraumes $V$. Die zu den Spiegelungen gehörigen Hyperebenen unterteilen $V$ in simpliziale Kegel, und $\Sigma$ ist isomorph zu dem von diesen Kegeln gebildeten Simplizialkomplex.

Sei nun $x$ ein Vertex von $\Sigma$ und $\mathcal{C}$ eine Kammer, die $x$ enthält. $x$ ist eine Halbgerade im Schnitt von $\#S-1$ Spiegelungshyperebenen, die zusammen mit einer weiteren Hyperebene die Kammer $\mathcal{C}$ festlegen. Damit ist klar, daß $W_x$ auch die gegenüberliegende Halbgerade stabilisiert.

Da der Stabilisator eines Vektors $y$ im Abschluß von $\mathcal{C}$ aber von den Spiegelungen an den Wänden von $\mathcal{C}$ erzeugt wird, die $y$ festlassen ([Br1, I.5F Theorem]), wird kein Vertex außer der gegenüberliegenden Halbgeraden von $W_x$ stabilisiert. $\square$

Bevor wir mit der Beschreibung der transversalen Unterkomplexe beginnen können, benötigen wir noch folgende

**Definition 4.1.6** *Für $U \leq V$ und $j = 1, 2$ sei*

$$\zeta_j(U) = \langle \delta(W) \mid W \subseteq U, \dim W = j \rangle.$$

**Bemerkung** $\zeta_j$ vertauscht mit der Wirkung von $G$, denn

$$\begin{aligned} \delta(gU) &= \{x \in V \mid f_u(x, v) = 0 \,\forall u \in gU,\ \forall v \in V\} \\ &= \{gx \in V \mid f_{gu}(gx, gv) = 0 \,\forall u \in U,\ \forall v \in V\} \\ &= \{gx \in V \mid f_u(x, v) = 0 \,\forall u \in U,\ \forall v \in V\} \\ &= g\delta(U). \end{aligned}$$

Die Entgegengesetztheitsinvolution in dem Fundamentalapartment $\Sigma$ läßt sich nun bestimmen:

**Lemma 4.1.7** *Sei $\Sigma$ das oben angegebene Apartment von $\Delta_{E_6}$ und $E$ ein Vertex von $\Sigma$. Betrachte die Unterräume*

$$\tilde{\zeta}_i(E) := \langle l \in \hat{X} \mid l \cap \zeta_i(E) = \{0\} \rangle.$$

*Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{op}_\Sigma(E) &= \tilde{\zeta}_1(E) \textit{ falls } \mathrm{typ}(E) \neq 6, \\ \mathrm{op}_\Sigma(E) &= \tilde{\zeta}_2(E) \textit{ falls } \mathrm{typ}(E) = 6. \end{aligned}$$

*Beweis:* Die Entgegengesetztheitsinvolution ist in einem Coxeter-Komplex vom Typ $E_6$ kein typerhaltender Automorphismus, sondern bewirkt im Diagramm eine Vertauschung der Typen.

Betrachten wir zunächst die Fundamentalkammer $\{V_1, V_2, V_3, V_5, V_{10}, V_6\}$. Im einzelnen gilt dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_1(V_1) &= \langle X \setminus \{x_1, \ldots, x_6, x'_1, x_{i,j} \mid i, j \neq 1\}\rangle \\
&= \langle x'_i, x_{1i} \mid i \neq 1\rangle, \\
\tilde{\zeta}_1(V_2) &= \langle X \setminus \{x_1, \ldots, x_6, x'_1, x'_2, x_{i,j} \mid \{i,j\} \neq \{1,2\}\rangle \\
&= \langle x'_i, x_{1,2} \mid i \neq 1, 2\rangle, \\
\tilde{\zeta}_1(V_3) &= \langle X \setminus \{x_1, \ldots x_6, x'_1, x'_2, x'_3, x_{i,j}\}\rangle \\
&= \langle x'_4, x'_5, x'_6\rangle, \\
\tilde{\zeta}_1(V_5) &= \langle X \setminus \{x_1 \ldots x_6, x'_1, \ldots, x'_4, x_{i,j}\}\rangle \\
&= \langle x'_5, x'_6\rangle, \\
\tilde{\zeta}_1(V_{10}) &= \langle X \setminus \{x_1, \ldots x_6, x'_1, \ldots x'_5, x_{i,j}\}\rangle \\
&= \langle x'_6\rangle, \\
\tilde{\zeta}_2(V_6) &= \langle X \setminus \{x_1, \ldots, x_6, x_{i,j}\}\rangle \\
&= \langle x'_1, \ldots, x'_6\rangle.
\end{aligned}$$

Da $f(x'_i+x_{i,1}, x'_i+x_{i,1}, v) \neq 0$ für $v = x_1$, ist $\langle x'_i, x_{i+1}\rangle$ für $i \neq 1$ nicht singulär, also eine hyperbolische Ebene. Außerdem ist $f(\langle x'_i, x_{i,1}\rangle, \langle x'_j, x_{j,1}\rangle, v) = 0$ für alle $v \in V$ und $i \neq j$, so daß $\tilde{\zeta}_1(V_1)$ hyperbolisch ist, und nach [As3, 6.7] sind die 10-dimensionalen hyperbolischen Unterräume maximal hyperbolisch.

Damit ist $\tilde{\zeta}_1(V_1)$ also ein Vertex in $\Sigma$ vom Typ 10, hat also den dem Typ 1 gegenüberliegenden Typ. Da die Weyl-Gruppe $W$ mit $\zeta_1$ vertauscht und transitiv auf den Vertizes eines Typs operiert, gilt dies auch für alle anderen Vertizes $E$ vom Typ 1.

Nun hält der Stabilisator von $E$ auch $\zeta_i(E)$ fest, und daher werden auch die Vertizes $\langle l \in \hat{X} \mid l \cap \zeta_i(E) = \{0\}\rangle$ stabilisiert. Mit Lemma 4.1.5 folgt also, daß $\tilde{\zeta}_1(E)$ dem Vertex $E$ gegenüberliegt.

Ähnlich beweist man die Behauptung für die anderen Typen. $\square$

Zur weiteren Berechnung benötigen wir folgendes Lemma über Doppelnebenklassen in Tits-Systemen. Sei dazu $(B, N)$ ein Tits-System mit Weyl-Gruppe $W$ und Erzeugenden $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Für $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $W_J = \langle s_j \mid j \in J\rangle$ und $P_J = BW_JB$. Dann gilt (siehe [Ro1, Theorem 5.4(iv)]):

**Lemma 4.1.8** *Seien* $J, K \subseteq \{1, \ldots, n\}$. *Dann wird durch* $W_J w W_K \mapsto P_J w P_K$ *eine Bijektion zwischen den Mengen von Doppelnebenklassen* $W_J \backslash W / W_k$ *und* $P_J \backslash G / P_K$ *definiert.*

**Satz 4.1.9** *Sei* $E \in \Delta_{E_6}$ *ein Vertex. Dann gilt für alle Vertizes* $U \in \Delta_{E_6}$*:*

$$U \operatorname{op} E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U \oplus \zeta_1(E) = V, & \textit{falls } \operatorname{typ} E \neq 6, \\ U \oplus \zeta_2(E) = V, & \textit{falls } \operatorname{typ} E = 6. \end{cases}$$

*Beweis:* Sei $\mathcal{C}$ eine Kammer, die $E$ enthält, sei $\operatorname{typ}(E) = i$ und $\Sigma$ ein Apartment mit $\mathcal{C} \in \Sigma$. Ferner sei $F$ ein Vertex in $\mathcal{C}$ vom Typ $\operatorname{op}(i)$.

$\mathrm{N}_G(E)$ operiert transitiv auf den $E$ gegenüberliegenden Vertizes. Die Darstellung von $\mathrm{N}_G(E)$ auf den Vertizes vom Typ $\operatorname{op}(i)$ ist isomorph zur Darstellung von $\mathrm{N}_G(E)$ auf $G/\mathrm{N}_G(F)$. Nach Lemma 4.1.8 entsprechen die Bahnen von $\mathrm{N}_G(E)$ auf $G/\mathrm{N}_G(F)$ aber gerade den Bahnen von $\mathrm{N}_W(E)$ auf $W/\mathrm{N}_W(F)$, d.h. den Bahnen von $\mathrm{N}_W(E)$ auf den Vertizes vom Typ $\operatorname{op}(i)$ in $\Sigma$.

Nun ist die Menge der Simplizes

$$\mathfrak{U}_E := \left\{ U \in \Delta_{E_6} \;\middle|\; \begin{array}{ll} U \oplus \zeta_1(E) = V, & \text{falls } \operatorname{typ}(E) \neq 6, \\ U \oplus \zeta_2(E) = V, & \text{falls } \operatorname{typ}(E) = 6 \end{array} \right\}$$

invariant unter $\mathrm{N}_G(E)$ und ihr Schnitt mit $\Sigma$ enthält nach dem vorangegangenen Lemma nur den in $\Sigma$ gegenüberliegenden Vertex, also ist $\mathfrak{U}$ die Menge der $E$ gegenüberliegenden Vertizes. $\square$

**Korollar 4.1.10** *Sei* $\eta$ *ein Simplex in* $\Delta_{E_6}$ *und* $\mathfrak{U}_E$ *definiert wie im Beweis des obigen Lemmas. Dann gilt*

$$\Delta^0_{E_6}(\eta) = \left\{ \sigma \in \Delta_{E_6} \;\middle|\; \begin{array}{l} \textit{es existiert ein Vertex } S \textit{ inzident mit } \sigma, \\ \textit{so daß } S \in \mathfrak{U}_E \textit{ für alle } E \in \eta. \end{array} \right\}$$

## 4.2 $F_4$-Unterkomplexe

Die universelle Chevalley-Gruppe vom Typ $F_4$ läßt sich als Stabilistor einer Hyperebene in der eben bestimmten Gruppe vom Typ $E_6$ darstellen. Wir übernehmen daher die Notationen aus dem vorigen Abschnitt.

Sei weiter $d := x_{1,6} + x_{2,5} + x_{3,4}$, $D := \mathrm{N}_G(\langle d \rangle)$ und $U := \{v \in V \,|\, Q_v(d) = 0\}$.

Speziell betrachten wir die quadratische Form $Q_d$ mit zugeordneter Bilinearform $f_d$. $f_d$ besitzt folgende Monome (mit Vorzeichen +1):

$$\begin{array}{cccccc} x_1x_6', & x_6x_1', & x_2x_5', & x_5x_2', & x_3x_4', & x_4x_3', \\ x_{1,2}x_{5,6}, & x_{1,3}x_{4,6}, & x_{1,4}x_{6,3}, & x_{1,5}x_{2,6}, & x_{1,6}x_{2,5}, & x_{2,5}x_{3,4}, \\ x_{1,6}x_{3,4}, & x_{2,3}x_{4,5}, & x_{2,4}x_{5,3} & & & \end{array}$$

**Lemma 4.2.1** *[As1]*

*(i) $U$ ist eine Hyperebene von $V$ und zwar*

$$\begin{aligned} U &= \langle V_6, V_6', x_{i,j}, ax_{1,6} + bx_{2,5} + cx_{3,4} \,| \\ &\qquad \{i,j\} \neq \{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}, a+b+c = 0\}. \end{aligned}$$

*(ii) $V$ und $U$ sind nichtausgeartete $Q_d$-Räume und $U$ ist $Q_d$-orthogonal zu $d$.*

*(iii) Entweder $U$ ist komplementär zu $\langle d \rangle$ in $V$ oder die Charakteristik von $K$ ist 3 und $d \in U$.*

**Definition 4.2.2** *[As1] Für einen singulären Punkt $u \in U$ sei $\mu(u)$ das Radikal von $u\Delta \cap U$ bezüglich der Bilinearform $f_d$. Für einen singulären Unterraum $A$ in $U$ sei*

$$\mu(a) = \bigcap_{a \in A} \mu(a).$$

*Ein Unterraum $A$ von $U$ heiße „amber“, falls $A$ singulär ist und $A$ in $\mu(A)$ enthalten ist. Eine Gerade $l$ in $U$ heiße „scarlet“, falls $l$ singulär und nicht amber ist. Ein Unterraum $T$ von $U$ heiße „tangerine“, falls $T$ singulär ist und eine Gerade $l$ enthält, die scarlet ist, so daß $T = l \oplus (\mu(l) \cap T)$.*

Wir können nun die Gruppe vom Typ $F_4$ und ihr Gebäude in der Hyperebene $U$ darstellen:

Sei $\Delta_{F_4}$ der Komplex über der Indexmenge $I = \{1, 2, 3, 6\}$, dessen Vertizes vom Typ $i$ die Bilder von $V_i$ unter $D$ und dessen Kammern die Bilder von $\{V_1, V_2, V_3, V_6\}$ unter $D$ sind. Weiter sei $\hat{X}_D = \hat{X} \setminus \{\langle x_{1,6}\rangle, \langle x_{2,5}\rangle, \langle x_{3,4}\rangle\}$ und $\Sigma$ der Unterkomplex von $\Delta_{F_4}$, der von den Elementen in $\hat{X}_D$ erzeugt wird.

Die für unsere Zwecke relevanten Ergebnisse aus [As1, Section 8 und 9] lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

**Satz 4.2.3** *(i) Sei $D^\infty$ der Schnitt über alle derivierten Untergruppen von $D$. Dann ist $D = D^\infty Z(G)$, und $D^\infty$ ist eine einfache Gruppe vom Typ $F_4$ mit zugehörigem Gebäude $\Delta_{F_4}$.*

*(ii) Die Vertizes vom Typ $i$ im Gebäude $\Delta_{F_4}$ sind die $i$-dimensionalen amber Unterräume von $U$ für $i = 1, 2, 3$ und die maximalen tangerine Unterräume von $U$ für $i = 6$. Inzidenz ist gleichbedeutend mit Inklusion.*

*(iii) Die Apartments von $\Delta_{F_4}$ sind die Bilder von $\Sigma$ unter $D$.*

Wir beginnen nun mit der Charakterisierung von $\Delta^0_{F_4}$. Zunächst studieren wir wieder die Entgegengesetztheitsinvolution in dem von $\hat{X}$ bestimmten Apartment:

**Lemma 4.2.4** *Sei $\Sigma$ das oben angegebene Apartment von $\Delta_{F_4}$. Für die Entgegengesetztheitsinvolution $\mathrm{op}_\Sigma$ gilt:*

$$\mathrm{op}_\Sigma(E) = \langle l \in \hat{X}_D \mid l \cap E^{\perp_d} = \{0\}\rangle$$

*Beweis:* Die Entgegengesetztheitsinvolution ist in einem $F_4$-Coxeter Komplex typerhaltend. Daher wird z.B. $V_1$ unter $\mathrm{op}_\Sigma$ auf einen Simplex vom Typ 1, d.h. einen amber Unterraum der Dimension 1 abgebildet. Nun gilt

$$\{\langle x\rangle \in \hat{X}_D \mid f_d(V_1, \langle x\rangle) \neq 0\} = \{\langle x'_6\rangle\}.$$

Da die Weyl-Gruppe $W$ $f_d$ invariant läßt, folgt also $\mathrm{N}_W(V_1)(\langle x'_6\rangle) = \langle x'_6\rangle$. Da außerdem $\mu(x'_6) = \langle x'_j, x_{1,k} \mid j \neq 1,\ k \neq 1, 6\rangle$, ist $\langle x'_6\rangle$ amber, so daß nach Lemma 4.1.5 $\mathrm{op}_\Sigma(V_1) = \langle x'_6\rangle$.

Ähnlich folgt $\mathrm{op}_\Sigma(\langle x_i\rangle) = \langle x'_{7-i}\rangle$, und da $\mathrm{op}_\Sigma$ ein Automorphismus ist, folgt die Behauptung für alle Elemente der Fundamentalkammer $\{V_1, V_2, V_3, V_6\}$, und da die Weyl-Gruppe $f_d$ invariant läßt, für alle Vertizes von $\Sigma$. □

**Satz 4.2.5** *Sei* $E \in \Delta_{F_4}$ *ein Vertex, d.h. ein Unterraum von* $U$*, der amber oder maximal tangerine ist. Dann gilt für alle Vertizes* $A \in \Delta_{F_4}$*:*

$$A \operatorname{op} E \quad \Leftrightarrow \quad A \oplus E^{\perp_d} = U.$$

*Beweis:* Der Beweis ist analog zu dem im letzten Abschnitt geführten im Fall $\Delta_{E_6}$ (siehe Satz 4.1.9). $\square$

**Korollar 4.2.6** *Sei* $\eta = \{E_1, \ldots, E_l\}$ *ein Simplex in* $\Delta_{F_4}$*. Dann gilt*

$$\Delta^0_{F_4}(\eta) = \{\sigma \in \Delta_{F_4} \mid S \pitchfork_U E^{\perp_d} \text{ für alle Vertizes } E \in \eta \text{ und } S \in \sigma\}.$$

# Anhang

## A.1 Programme zum Euler-Charakteristik Test

Die folgende Funktion `chi` beinhaltet die Umsetzung der Rekursionsformel für die Euler-Charakteristik von $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$ in ein Mathematica-Programm und die Funktion `chartest` berechnet das Vorzeichen von $(-1)^{i-1}(1-\chi_i(q))$ für $q = 2$ und $q = 3$ und $i = 2, \ldots, n$. (Die für die $C_n$-Unterkomplexe leicht modifizierten Programme sind hier nicht aufgeführt.)

```
chi[0,q_] := 0
(chi[n_,q_] := Block[{i},
  chi[n,q] = Expand[
    Sum[ q^((n+1-i)*i) * (1 - chi[n-i,q]), {i,1,n}]
    ]
  ]
)
(chartest[n_]:= Block[{i},
  Do[
    Write["tabelle.m", i,
      OutputForm["  ,  "], Sign[(-1)^(i-1) * (chi[i,2]-1)],
      OutputForm["  ,  "], Sign[(-1)^(i-1) * (chi[i,3]-1)]
      ],{i,2,n,1}
    ]
  ]
)
```

Die folgende Maple-Funktion `redeulchar` berechnet die Polynome $p_n$, `maxnull` ermittelt die maximalen Nullstellen von $p_n$ fuer $n = 1 \ldots m$ und stellt sie grafisch dar, während die Funktion `nullstellen` die Darstellung der komplexen Nullstellen von $p_n$ übernimmt.

```
redeulchar := proc (n)
   global p,i,x; local g;
   g[0] := 0; p[0]:= 0;
   for i from 1 to n do
     g[i] := expand(sum(x^(j*(i+1-j))*(1-g[i-j]),j=1..i));
     p[i] := simplify(expand(g[i]-1));
   od;
end;
```

```
maxnull := proc(m)
  local a,j,zeros;
  zeros:=[];
  for j from 1 to m do
    a:=[fsolve(p[j],x)];
    zeros:=[op(zeros),op([j,a[nops(a)]])];
  od;
  plotsetup(ps, plotoutput=`maxnull.ps`,
    plotoptions=`noborder`);
  plot(zeros, labels=[n,` `], xtickmarks=m, symbol=circle,
    style=point,axesfont=[TIMES,ROMAN,20],
    labelfont=[TIMES,ITALIC,20]);
end;
nullstellen := proc (n)
  local a,b,j;
  b:=[];
  a:=[fsolve(p[n],x,complex)];
  for j from 1 to nops(a) do
    b:=[op(b),op([Re(a[j]),Im(a[j])])];
  od;
  plotsetup(ps, plotoutput=`nullst.ps`,
    plotoptions=`noborder`);
  plot(b,x=-1.5..3.5, labels=[` `,` `], symbol=circle,
    scaling=constrained, axes=framed, style=point,
    axesfont=[TIMES,ROMAN,20]);
end;
```

## A.2 Programme zum erweiterten Test

Das folgende Programm berechnet den $f$-Vektor von $\Delta^0_{A_n}(\mathcal{E}_n)$

```
f[1,q_]:={q}
(f[n_,q_]:=
       Block[{m, a, b, i, liste={}},
               a=Sum[q^((n+1-i)*i),
                 {i,1,n,1}
              ];
              AppendTo[liste,Expand[a]];
              Do[
                b=Sum[q^((n + 1 - i)*i)
                      * f[n-i,q][[m]],
                     {i,1,n-m,1}
                  ];
                AppendTo[liste,Expand[b]],
              {m,1,n-1,1}
             ];
             f[n,q]=liste
            ]
).
```

Die folgenden drei Programme dienen zur Berechnung der $\partial_k$ Funktion, wobei folgende Annäherung benutzt wurde:

**Lemma 4.2.7** *Seien* $n, k \geq 1$ *und* $a := \max\{i \in \mathbb{N} \mid \binom{i}{k} \leq n\}$. *Dann ist* $a \leq (nk!)^{1/k} + k - 1$.

*Beweis:*

$$\begin{array}{rrcl} & \binom{a}{k} & \leq & n \\ \Rightarrow & a(a-1)\cdots(a-k+1) & \leq & nk! \\ \Rightarrow & (a-k+1)^k & \leq & nk! \\ \Rightarrow & a & \leq & (nk!)^{1/k} + k - 1 \end{array}$$

$\square$

```
(koeff[m_,l_]:=
   Block[{a=Floor[(m*l!)^(1/l) //N]+l-1 },
     If[l==1,a=m,
       While[Binomial[a,l]>m, a--];
       ];
     Return[a];
     ]
)
(binom[n_,k_]:=
   Block[{i=k, b, d=n, liste={}},
     While[d!=0,
       b=koeff[d,i]; d=d-Binomial[b,i];
       AppendTo[liste,b]; i=i-1
       ];
     Return[liste]
     ]
)
(delta[k_,n_]:=
   Block[{i, l=k , sum=0, liste={}},
     If[n==0, sum = 0,
        liste = binom[n,k+1];
        Do[sum = sum + Binomial[liste[[i]],l];
           l = l-1,
           {i,1,Length[liste],1}
           ];
        ];
      Return[sum]
      ]
).
```

Die nächsten Programme überprüfen nun, ob alle Eigenschaften aus Korollar 2.3.2 erfüllt sind. Wir gehen zunächst von der Gültigkeit von 2.3.2 (i), d.h. der Euler-Poincaré Formel, aus und berechnen mit dem Programm `sph` die Anzahl der Sphären $k$.

`test[n,0,q]` überprüft zunächst, ob $k$ wirklich nichtnegativ ist (ansonsten würde das Programm als Wert $-2$ ausgeben) und berechnet dann das Vorzeichen von $f_d - k - \partial_d(k)$, d.h. es testet die Bedingung (iii) aus 2.3.2. Ebenso verfährt das Programm `test[n,m,q]` mit den Bedingungen in 2.3.2 (ii).

Das Programm `bjkaltest` schließlich faßt die Ergebnisse eines Testlaufs zusammen und gibt sie in Listenform in eine Datei aus. Ein nicht sphärischer

Unterkomplex wäre also gefunden, wenn an einer Stelle des Programmresultats über einem bestimmten Körper q eine $-2$ oder $-1$ auftreten würde.

```
(sph[n_,q_]:= Block[{j, a},
   a = f[n,q][[n]]
       + (-1)^(n) * (1 - Sum[(-1)^j * f[n,q][[j+1]],
                                         {j,0,n-2}]);
   Return[a]
   ]
)
(test[n_,0,q_]:= Block[{a},
   If[sph[n,q] >= 0,
      a=Sign[f[n,q][[n]] - delta[n-1,sph[n,q]] -sph[n,q]],
      a = -2];
   Return[a]
   ]
)
(test[n_,m_,q_]:= Block[{j, a},
   If[ Sum[(-1)^(j-m-1) f[n,q][[j+1]], {j,m+1,n-2}]
          + (-1)^(n-2-m) (f[n,q][[n]] - sph[n,q]) >= 0,
      a = Sign[Sum[(-1)^(j-m) f[n,q][[j+1]], {j,m,n-2}]
          + (-1)^(n-1-m) (f[n,q][[n]] - sph[n,q])
          - delta[ m ,
              Sum[(-1)^(j-m-1) f[n,q][[j+1]], {j,m+1,n-2}]
              +(-1)^(n-2-m) (f[n,q][[n]] - sph[n,q])]
          ],
      a = -2];
   Return[a]
  ]
)
(bjkaltest[n_,q_]:= Block[{liste={},i,j},
   Do[ liste={i, test[i,0,q]};
       Do[ AppendTo[liste,test[i,j,q]],{j,1,i-2}];
       Write["kalai.m", i, OutputForm["  ,  "], liste],
       {i,2,n,1}
       ]
   ]
).
```

# Literatur


[AA] Abels, H. und Abramenko, P., “Of the Homotopy Type of Subcomplexes of Tits Buildings”, *Advances in Mathematics* 101, No. 1, 1993, 78 – 86.

[AB] Abels, H. und Brown, K.S., “Finiteness Properties of Solvable $S$-Arithmetic Groups: An Example”, *Journal of Pure and Applied Algebra* 44, 1987, 77 – 83.

[Ab] Abels, H., “Finiteness Properties of Certain Arithmetic Groups in the Function Field Case”, *Israel Journal of Math.* 76, 1991, 113 – 128.

[Abr1] Abramenko, Peter, “Endlichkeitseigenschaften der Gruppen $SL_n(\mathbb{F}_q[t])$”, Dissertation, Frankfurt am Main, 1987.

[Abr2] Abramenko, Peter, “Finiteness properties of Chevalley Groups over $\mathbb{F}_q[t]$”, *Israel Journal of Math.* 87, 1994, 203 – 223.

[Abr3] Abramenko, Peter, “Some spherical subcomplexes of spherical buildings I”, Universität Bielefeld SFB 343 Preprint 58, 1992.

[Abr4] Abramenko, Peter, “Some spherical subcomplexes of spherical buildings II”, Manuskript.

[Abr5] Abramenko, Peter, mündliche Mitteilung im August 1994.

[An] Anderson, Ian, *Combinatorics of Finite Sets*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[As1] Aschbacher, Michael, *Finite group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[As2] Aschbacher, Michael, “Some Multilinear Forms with Large Isometry Groups”, *Geometriae Dedicata* 25, 1988, 417 – 465.

[As3] Aschbacher, Michael, “The 27-dimensional module for $E_6$. I”, *Inventiones Mathematicae* 89, 1987, 159 – 195.

[Bj1] Björner, A., “Some Combinatorial and Algebraic Properties of Coxeter Complexes and Tits Buildings”, *Advances in Mathematics* 52, 1984, 173 – 212.

[Bj2] Björner, A., "Topological Methods", Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász), North Holland, Preprint, 1989.

[BFS] Björner, A., Frankl, P. und Stanley, R., "The number of faces of balanced Cohen-Macaulay complexes and a generalized Macaulay theorem", *Combinatorica* 7 (1), 1987, 23 – 34.

[BK1] Björner, A. und Kalai, G., "An extended Euler-Poincaré theorem", *Acta Math.* 161, 279 – 303.

[BK2] Björner, A. und Kalai, G., "On $f$-Vectors and Homology", in: *Combinatorial Mathematics – Proceedings of the third international conference 1985*, Annals New York Acad. Sci. 555, 63 – 80.

[Bo] Bourbaki, N., *Groupes et algébres de Lie 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.

[Brou] Brouwer, Andries E., Vortragsnotiz über die Beschreibung transversaler Komplexe als Buekenhout-Tits-Geometrien, übermittelt durch Hendrik van Maldeghem, Eindhoven.

[Br1] Brown, K.S., *Buildings*, Springer-Verlag, Berlin und New York, 1989.

[Br2] Brown, K.S., "Five lectures on buildings" in: *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, Workshop ICTP Trieste Italy, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hongkong, 1991, Trieste conference 1990, erscheint bei World Scientific.

[Bue1] Buekenhout, Francis, "Diagrams for Geometries and Groups", *Journal of Combinatorial Theory*, A 555 (1979), 121 – 151.

[Bue2] Buekenhout, Francis, "The Basic Diagram of a Geometry", in: *Geometries and Groups*, Proceedings, Springer Verlag, Berlin, 1981, 1 – 29.

[Bue3] Buekenhout, Francis, "The Geometry of the Finite Simple Groups", in: *Buildings and the Geometry of Diagrams*, Como, Springer Verlag, Berlin, 1984, 1 – 78.

[FV] Freudenthal, H. und de Vries, H., *Linear Lie Groups*, Academic Press, New York and London, 1969.

[Fo] Folkman, Jon, "The Homology groups of a Lattice", *Journal of Mathematics and Mechanics* 15, No. 4, 1966, 631 – 636.

[Ga] Garland, Howard, "$p$-adic Curvature and the Cohomology of Discrete Subgroups of $p$-adic Groups", *Ann. of Math.* 97, 1973, 375 – 423.

[Lus] Lusztig, George, *The Discrete Series of $GL_n$ over a Finite Field*, Princeton University Press, Princeton, 1974.

[Qu1] Quillen, D., "Finite Generation of the Groups $K_i$ of Rings of Algebraic Integers", in: *Algebraic K-Theory I*, Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 179 – 198.

[Qu2] Quillen, D., *Higher Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics 341, Springer, Berlin, 1973, 85 – 147.

[Qu3] Quillen, D., "Homotopy properties of the poset of nontrivial $p$-subgroups of a group", *Advances in Math.* 28, 101 – 128.

[Re] Remmert, Reinhold, *Funktionentheorie I*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.

[Ro1] Ronan, M., *Lectures on Buildings*, Perspectives in Mathematics, Academic Press, Inc., 1989.

[Ro2] Ronan, M., "Buildings: Main Ideas and Applications I, II", *Bull. London Math Soc.* 24, 1992, 1 – 51 und 97 – 126.

[Sch] Scharlau, R., Kapitel über Gebäude in der Enzyklopädie der Geometrie, Universität Bielefeld SFB 343 Preprint 16, 1993.

[Sp] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[So] Solomon, L., "The Steinberg character of a finite group with BN-pair", in: *Theory of finite groups*, Proc. Sympos. Harvard 1968, Benjamin, New York, 1969, 213 – 221.

[Ti1] Tits, J., "A local approach to buildings", *The geometric vein*, Coxeter Festschrift, Springer, New York, 1981, 519 – 547.

[Ti2] Tits, J., *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math., no. 386, Springer-Verlag, Berlin und New York, 1974.

[Ti3] Tits, J., "On Buildings and their Applications", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver, 1974, vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, 1975, 209 – 220.

[Ti4] Tits, J., "Ensembles Ordonnés, Immeubles et Sommes Amalgamées", *Bulletin de la Société Mathématique Belgique* 38, 1986, 367 – 387.

[Vo] Vogtmann, Karen, "Spherical Posets and Homology Stability for $0_{n,n}$", *Topology* 20, 1981, 119 – 132.