Universität Bielefeld — Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Analysis I

Blatt 1 (Rechenregeln / Vollständige Induktion)

Übung 1 soll in der Woche vom 18.10.2010 bis 22.10.2010 in den Tutorien besprochen werden und braucht nicht abgegeben zu werden.

Übung 1 (Vollständige Induktion : 0 Punkte)
Sind $m, n \in \mathbb{N}$, so heißt n durch m teilbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = k \cdot m$ gibt. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar.

Übung 2 – 4 sollen (wie üblich) abgegeben werden.

Übung 2 (Rechenregeln : 4 + 4 = 8 Punkte)
Zeigen Sie (in Ergänzung zur Vorlesung), dass die Regeln (1.29) und (1.30) aus den Regeln (1.1) – (1.9) folgen.

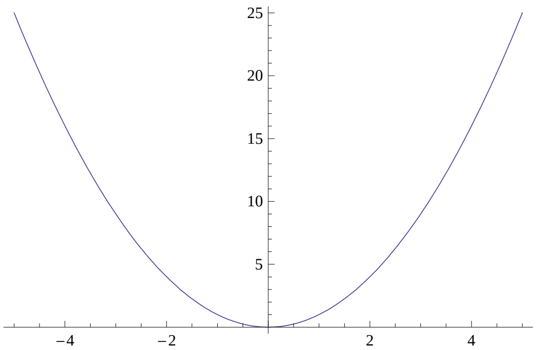
Wichtiger Hinweis: Regeln, bei denen wir uns schon überlegt haben, dass sie aus den Regeln (1.1) – (1.9) folgen, dürfen Sie natürlich verwenden!

Übung 3 (Rechenregeln : 14 Punkte)
Wir betrachten die Menge X aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen mit $y = x^2$ („Parabel“) mit den Verknüpfungen

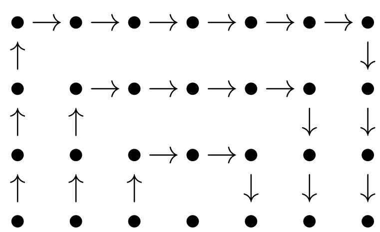
$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y' + 2xx') \quad \text{und} \quad (x, y) \cdot (x', y') := (xx', yy')\,.$$

Zeigen Sie, dass die Rechenregeln (1.1) – (1.30) entsprechend gelten.

Wichtiger Hinweis: Es ist nicht erforderlich, alle 30 Regeln nachzuprüfen!



Übung 4 (Vollständige Induktion : 8 Punkte)
Finden Sie – eventuell mit Hilfe der folgenden Zeichnung – einen möglichst einfachen Ausdruck für die Summe $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3)$ $(n \in \mathbb{N}$ beliebig) und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.



Abgabe: Freitag, 22. Oktober 2010, 12.00 Uhr. (Wo? – Fragen Sie Ihren Tutor!)

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 1 (Rechenregeln / Vollständige Induktion)

Präsenzübung 1 (Falsche Beweise)
Wo steckt der Fehler im folgenden Beweis?

Behauptung:
Alle Menschen sind gleich.

Beweis:
Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Je n Menschen sind gleich. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang: $(n = 1)$
Ein Mensch ist natürlich gleich sich selbst; also ist hier nichts zu zeigen.

Induktionsschritt: $(n \to n + 1)$
Es seien je n Menschen gleich (= Induktionsvoraussetzung). Es ist zu zeigen, dass je $n + 1$ Menschen gleich sind.

Seien also $n + 1$ Menschen gegeben. Bezeichne diese mit $☺_1, \dots, ☺_{n+1}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
☺_1 = ☺_2 = \ldots = ☺_n & \qquad \text{(nach I.V.)} \\
☺_2 = \ldots = ☺_n = ☺_{n+1} & \qquad \text{(nach I.V.)}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$☺_1 = ☺_2 = \ldots = ☺_n = ☺_{n+1}\,,$$

was zu zeigen war.

Mittels vollständiger Induktion nach n folgt die Behauptung.

Präsenzübung 2 (Vollständige Induktion)
In wie viele Gebiete kann man die Ebene mit n Geraden höchstens unterteilen? Bezeichne die maximale Anzahl mit g_n. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für g_n und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.

Präsenzübung 3 (Rechenregeln)
In der Vorlesung wurde angemerkt, dass für die Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit den in der Vorlesung angegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ die Regeln (1.1) – (1.30) entsprechend gelten. Genauer erhält man die Verknüpfungen ausgehend von den entsprechenden Verknüpfungen in $\mathbb{N}_0$, indem man vom Ergebnis nur den Rest bei Division durch 2 behält. (*Prüfen Sie dies nach!*)

(a) Diskutieren Sie, wie man die Regeln (1.1) – (1.30) nachprüfen kann.

(b) Stellen Sie Verknüpfungstabellen für die Mengen $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ und $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ auf; hier wird der Rest bei Division durch 3 bzw. 4 behalten. Untersuchen Sie, ob auch hier die Regeln (1.1) – (1.30) entsprechend gelten. (Assoziativ- und Distributivgesetz dürfen Sie dabei glauben!) Beschreiben Sie, wie man anhand der Verknüpfungstabellen sieht, ob die Regeln erfüllt sind.