

Übungen zur Analysis I

Blatt 2 (Summationsformeln / Körperaxiome)

Übung 5 (Summationsformeln : jeweils 4 = 12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- (b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k^2 = (-1)^n \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.
- (c) Geben Sie (mit Beweis) einen möglichst einfachen Ausdruck für die folgende Summe an:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+a)(k+a+1)} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, a \geq 0)$$

Wenn Ihnen die Aufgabe zu schwierig erscheint, sollten Sie sie für den Spezialfall $a = 0$ bearbeiten.

Übung 6 (Beispiele für Körper : 9 Punkte)

Wir betrachten die Menge Y aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen („Ebene“) mit den Verknüpfungen

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \quad \text{und} \quad (x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Zeigen Sie, dass die Menge Y mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen Körper bildet.

Übung 7 (Potenzgesetze : 3 + 6 = 9 Punkte)

Sei K ein beliebiger Körper. Beweisen Sie die Potenzgesetze:

- (a) Für alle $x, y \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
Falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$, gilt dies sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- (b) Für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.
Falls $x \neq 0$, gilt dies sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

Abgabe: Freitag, 29. Oktober 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 2 (Summationsformeln / Binomialkoeffizienten)

Präsenzübung 4 (Falsche Beweise)

Wo steckt der Fehler im folgenden Beweis?

Behauptung:

Alle reellen Zahlen sind gleich.

Beweis:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Wir müssen zeigen, dass $x = y$ gilt.

Betrachte dazu das *arithmetische Mittel* $m := \frac{x+y}{2}$. Dann folgt:

$x = 2m - y$ und $y = 2m - x$	Multiplikation mit m bzw. x
$mx = 2m^2 - my$ und $xy = 2mx - x^2$	Addieren und Umordnen
$mx + my - 2m^2 - x^2 - xy + 2mx = 0$	geschicktes Ausklammern
$(m - x)(x + y - 2m) = 0$	Multiplikation mit $(x + y - 2m)^{-1}$
$m - x = 0$	

Also gilt $m - x = 0$. Auf die gleiche Weise können wir zeigen, dass $m - y = 0$. (Vertausche dazu die Rollen von x und y .) Zusammen folgt daher $x = m = y$, was zu zeigen war.

Präsenzübung 5 (Summationsformel)

Zeigen Sie: Ist K ein beliebiger Körper, so gilt für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}.$$

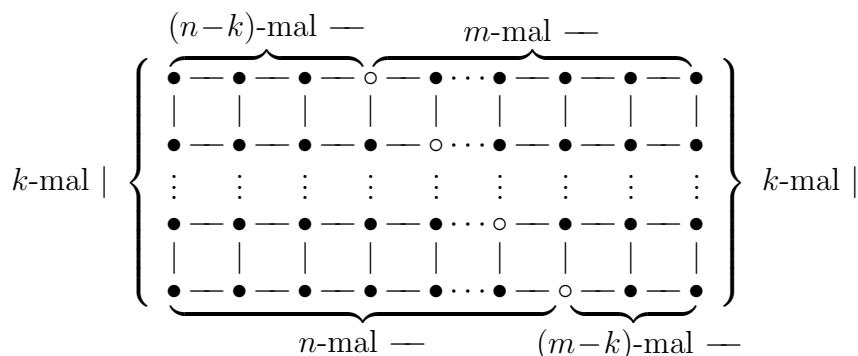
Präsenzübung 6 (Binomialkoeffizienten)

(a) Zeigen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{n}{m} \binom{m}{k}$.

Wie lässt sich die Formel am Pascal'schen Dreieck veranschaulichen?

(b) Zeigen Sie: Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$.

Wie lässt sich die Formel anhand von Rastern (hier z. B. für $n, m \geq k$) veranschaulichen?



Und wie kann man sich die Formel mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes merken?