Universität Bielefeld Wintersemester 2010/2011

Übungen zur Analysis I

Blatt 3 (Angeordnete Körper)

Übung 8 (Ungleichungen I : jeweils 3 = 15 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 4$ gilt $2^n \geq n^2$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $3^n \geq n^3$.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 0, \ldots, n$ gilt $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$.
Hinweis: Benutzen Sie Teil (c) sowie Aufgabe 5 (c).

(e) Ist K ein angeordneter Körper, sind $x, y \in K_{\geq 0} := \{z \in K \mid z \geq 0\}$ und ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Übung 9 (Ungleichungen II : 3 + 4 + 2 = 9 Punkte)
Beweisen Sie unter Verwendung der Körper- bzw. Anordnungsaxiome für die reellen Zahlen:

(a) Sind $x_1, \ldots, x_n$ nicht-negative reelle Zahlen, so gilt

$$(1 + x_1) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_n \, .$$

(b) Sind $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen mit $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt

$$(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n) \geq 1 - x_1 - \ldots - x_n \, .$$

(c) Folgern Sie aus (a) und (b) [erneut] die *Bernoulli'sche Ungleichung*:
Ist x eine reelle Zahl mit $x \geq -1$, so gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übung 10 (Teilmengen : 3 + 3 = 6 Punkte)
Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und X eine Menge mit n Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Teilmengen von X gleich 2^n ist.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der Teilmengen von X, die eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Elementen besitzen.

Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten!

Abgabe: Freitag, 05. November 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 3 (Angeordnete Körper)

Falls Sie noch Fragen zum Test „Vorwissen Mathematik“ haben, können Sie sie in der Präsenzübung untereinander bzw. gemeinsam mit Ihrem Tutor / Ihrer Tutorin besprechen.

Präsenzübung 7 (Teilmengen von $\mathbb{R}$)
Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen möglichst einfach (z. B. durch Mengen der Gestalt $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$, $\{x \in \mathbb{R} \,|\, b \leq x \leq c\}$ usw. bzw. durch Vereinigungen solcher Mengen):

(a) $\big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-1| > 2\big\}$ (b) $\big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, (x+3)^2 < 4\big\}$ (c) $\big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2 - x - 2 \geq 0\big\}$

Präsenzübung 8 (Beispiele für Körper)
Sei K ein Körper.

(a) Unter einem *Polynom* (über K) verstehen wir einen formalen Ausdruck von der Form $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$. $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ heißen auch *Koeffizienten* von p. Zwei Polynome $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ und $q = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j$ sind gleich, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i = 0, \ldots, \max\{n, m\}$ gilt; dabei sind für $n \neq m$ die fehlenden Koeffizienten gleich Null zu setzen. Die Menge aller Polynome (über K) bezeichnen wir mit $K[x]$. Die Summe bzw. das Produkt zweier Polynome p und q wie eben erhält man durch formales Addieren bzw. Multiplizieren und Sortieren nach „Potenzen“ von x; es sei also

$$p + q := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (\alpha_i + \beta_i) x^i \quad \text{und} \quad p \cdot q := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \alpha_k \beta_j x^{k+j} = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k+j=i} \alpha_k \beta_j \right) x^i .$$

Zeigen Sie, dass die Polynome (über K) die Rechenregeln (1.1) – (1.7) und (1.9) erfüllen, also einen *kommutativen Ring* bilden, den sog. *Polynomring* (über K).

(b) Sei $p = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \in K[x]$. Ist $\alpha_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p, kurz $\mathrm{grad}(p)$. Sind alle Koeffizienten von p gleich Null (*wo ist dieser Fall beim Nachprüfen der Regeln aufgetreten?*), so setzen wir $\mathrm{grad}(p) := -\infty$. Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in K[x]$ gilt:

$$\mathrm{grad}(p \cdot q) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$$

Folgern Sie: Es gilt $p \cdot q = 0$ genau dann, wenn $p = 0$ oder $q = 0$. (Der Polynomring $K[x]$ ist also *nullteilerfrei.*) Zeigen Sie außerdem, dass die Polynome (über K) nicht die Rechenregel (1.8) erfüllen, also keinen Körper bilden.

(c) Ähnlich wie man ausgehend von den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen erhält, kann man ausgehend von den Polynomen (über K) die *rationalen Funktionen* (über K) erhalten. Dazu betrachten wir „Brüche von Polynomen“ der Form $\frac{p}{q}$, wobei $p, q \in K[x]$, $q \neq 0$. Zwei solche Brüche $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ sind gleich, wenn $p \cdot s = q \cdot r$ gilt (*wie bei den rationalen Zahlen kann man also „erweitern“ und „kürzen“!*). Überprüfen Sie, dass diese Gleichheitsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Statt von „Brüchen von Polynomen“ sprechen wir auch von „rationalen Funktionen“. Die Menge aller rationalen Funktionen (über K) bezeichnen wir mit $K(x)$.

– Fortsetzung folgt –