

Übungen zur Analysis I

Blatt 4 (Angeordnete Körper – Folgen und Grenzwerte)

Übung 11 (Teilmengen von $\mathbb{R}$: 3 + 3 = 6 Punkte)

Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen möglichst einfach (z. B. durch Mengen der Gestalt $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid b \leq x \leq c\}$ usw. bzw. durch Vereinigungen solcher Mengen):

$$(a) \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < |x - 3|\} \quad (b) \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2x - 16| \geq 8\}$$

Hinweis: Wie üblich sind nicht nur die Angabe der richtige Ergebnisse, sondern zusätzlich auch Begründungen / Beweise verlangt.

Übung 12 (Bewertete Körper : 3 Punkte)

Sei K ein bewerteter Körper. Zeigen Sie: Für alle $x, y \in K$ gilt $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Übung 13 (Potenzen in $\mathbb{R}$: 3 + 3 = 6 Punkte)

Beweisen Sie (für den Körper der reellen Zahlen) den folgenden Satz:

- (a) Ist b eine positive reelle Zahl mit $b > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$ für alle $n \geq N$.
- (b) Ist b eine positive reelle Zahl mit $b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Hinweis: Ein Verweis auf den ähnlich lautenden Satz aus der Vorlesung ist nicht zulässig, da dieser Satz nicht bewiesen worden ist.

Übung 14 (Grenzwerte : jeweils 3 = 15 Punkte)

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf Konvergenz und bestimmen Sie ihren Grenzwert (falls existent):

$$(a) a_n = \frac{n+3}{5n^2+1}$$

$$(d) a_n = n/2^n$$

$$(b) a_n = \frac{n^3 - n}{2n^3 + 3n^2}$$

Wenn Sie (d) mit $a_n = n^k/2^n$ (wobei $k \in \mathbb{N}$ fest) lösen, können Sie max. 3 Extra-Punkte erhalten.

$$(c) a_n = \frac{(-1)^n n^3 - n}{2n^3 + 3n^2}$$

$$(e) a_1 := 1, a_{n+1} := \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a \text{ (wobei } a \in \mathbb{R} \text{ fest)}$$

Hinweis: Bei (d) können Sie z. B. Aufgabe 8(a) verwenden (für die Extra-Punkte müssen Sie sich etwas anderes einfallen lassen!), und bei (e) können Sie einen geschlossenen Ausdruck für a_n finden (und nachweisen).

Abgabe: Freitag, 12. November 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 4 (Angeordnete Körper – Folgen und Grenzwerte)

Präsenzübung 8 (Beispiele für Körper)

Sei K ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K (vgl. Übungsblatt 3).

- (c) Ähnlich wie man ausgehend von den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen erhält, kann man ausgehend von den Polynomen (über K) die *rationalen Funktionen* (über K) erhalten. Dazu betrachten wir „Brüche von Polynomen“ der Form $\frac{p}{q}$, wobei $p, q \in K[x]$, $q \neq 0$. Zwei solche Brüche $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ sind gleich, wenn $p \cdot s = q \cdot r$ gilt (wie bei den rationalen Zahlen kann man also „erweitern“ und „kürzen“!). Überprüfen Sie, dass diese Gleichheitsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Statt von „Brüchen von Polynomen“ sprechen wir auch von „rationalen Funktionen“. Die Menge aller rationalen Funktionen (über K) bezeichnen wir mit $K(x)$.
- (d) Wir setzen nun für $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in K(x)$

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{ps + qr}{qs} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{pr}{qs}.$$

Besprechen Sie mit Ihrem Tutor / Ihrer Tutorin, worin das *Wohldefiniertheitsproblem* besteht und wie man es löst. Zeigen Sie anschließend, dass die rationalen Funktionen (über K) die Rechenregeln (1.1) – (1.9) erfüllen, also einen Körper bilden, den sog. *Körper der rationalen Funktionen* (über K).

- (e) Sei nun K ein angeordneter Körper. Dann bezeichnen wir ein Element $\frac{p}{q} \in K(x) \setminus \{0\}$, $p = \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k$, $q = \sum_{j=0}^m \beta_j x_j$, als *positiv*, wenn $\alpha_{\text{grad}(p)} / \beta_{\text{grad}(q)} > 0$ in K . Zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist und dass die Anordnungsaxiome erfüllt sind. Damit wird $K(x)$ zu einem angeordneten Körper. Zeigen Sie weiter, dass $x > n$ in $K(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (hier betrachten wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K , K als Teilmenge von $K[x]$ und $K[x]$ als Teilmenge von $K(x)$!). $K(x)$ ist also kein archimedisch angeordneter Körper.

Präsenzübung 9 (Folgen und Grenzwerte)

Gegeben seien die folgenden Folgen reeller Zahlen (die auf die nahe liegende Art und Weise fortgesetzt sein sollen):

(a)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...	
(b)	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	
(c)	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	...
(d)	$\frac{1}{1001}$	$\frac{2}{1002}$	$\frac{3}{1003}$	$\frac{4}{1004}$	$\frac{5}{1005}$	$\frac{6}{1006}$	$\frac{7}{1007}$	$\frac{8}{1008}$	...					
(e)	$+\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{9}$	...				
(f)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	...

Beschreiben Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils durch eine präzise Formel vom Typ $x_n = \dots$ und untersuchen Sie sie auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig ausgehend von der Definition des Grenzwertes (bzw. den Ihnen bereits bekannten Sätzen).