Übungen zur Analysis I

Blatt 5 (Grenzwerte)

Übung 15 (Potenzsummen : 2 + 3 = 5 Punkte)
Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in K \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

(b) Für alle $x \in K \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

Übung 16 (Potenzreihen : 3 + 4 = 7 Punkte)
Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \qquad\qquad \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Wichtiger Hinweis: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0$. (Dies wird im Rahmen der Besprechung von Übung 14 (e) gezeigt und darf hier als bekannt vorausgesetzt werden.)

Übung 17 (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte : 3 + 3 = 6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz bzw. der bestimmten Divergenz:

(a) Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \geq N$, und es gilt $\lim_{n\to\infty}(1/a_n) = 0$.

(b) Es gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, und es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(1/a_n) = \infty$.

Übung 18 (Rekursiv definierte Folgen : 5 + 7 = 12 Punkte)
Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

(a) $a_1 := 1$, $a_{n+1} := (1 + \frac{1}{5}a_n)^2$

(b) $a_1 := 1$, $a_{n+1} := (a_n - 1)/(a_n - 2)$

Wichtiger Hinweis: In Übung 18 (b) ist unter anderem zu zeigen, dass $a_n \neq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.

Abgabe: Freitag, 19. November 2010, 12.00 Uhr.

Universität Bielefeld Wintersemester 2010/2011

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 5 (Grenzwerte)

Präsenzübung 10 (Falsche Beweise)
Wo steckt der Fehler im folgenden Beweis?

> *Behauptung:*
> Alle reellen Zahlen sind gleich.
>
> *Beweis:*
> Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Wir müssen zeigen, dass $x = y$ gilt.
> Betrachte dazu das *arithmetische Mittel* $m := \frac{x+y}{2}$. Dann folgt:
>
> $$\begin{array}{ll} x = 2m - y \quad \text{und} \quad 2m - x = y & \big|\,\text{Multiplikation beider Seiten} \\ 2mx - x^2 = 2my - y^2 & \\ m^2 - 2mx + x^2 = m^2 - 2my + y^2 & \big|\,\text{Binomische Formel} \\ (m-x)^2 = (m-y)^2 & \big|\,\sqrt{\cdot} \\ m - x = m - y & \\ x = y & \end{array}$$
>
> Daraus folgt die Behaputung.

Präsenzübung 11 (Konvergenz)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und ist $a_n < b$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a < b$.

(b) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und ist $a < b$, so folgt $a_n < b$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

(d) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Präsenzübung 12 (Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte)
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $b \in \{-\infty, +\infty\}$.

(a) Verstehen und beweisen Sie die folgenden Aussagen:

– Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, *vorausgesetzt* es liegt nicht der Fall $+\infty - \infty$ oder $-\infty + \infty$ vor.
– Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, *vorausgesetzt* es liegt nicht der Fall $0 \cdot (+\infty)$ oder $0 \cdot (-\infty)$ vor.

(b) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass in den genannten Ausnahmefällen alles Mögliche passieren kann (Konvergenz gegen ein beliebig vorgegebenes $c \in \mathbb{R}$ // bestimmte Divergenz gegen $-\infty$ oder $+\infty$ // weder Konvergenz noch bestimmte Divergenz).