Übungen zur Analysis I

Blatt 6 (Konvergenz von Folgen und Reihen)

Übung 19 (*k*-te Wurzeln : 2 + 2 + 2 + 4 = 10 Punkte)
Bekanntlich gibt es zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $k \geq 2$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $b \geq 0$ mit $b^k = a$, die wir auch als *kte Wurzel von a*, kurz $\sqrt[k]{a}$, bezeichnen. (Die *Existenz*, die in der Vorlesung nur für $k = 2$ gezeigt worden ist, lässt sich auf ähnliche Weise auch für $k > 2$ zeigen. Die *Eindeutigkeit* ergibt sich unmittelbar aus Aufgabe 8 (e).) Statt $\sqrt[2]{a}$ schreiben wir (wie üblich) auch nur $\sqrt{a}$.

(a) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln (für festes $k \geq 2$):

$$\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0) \qquad\qquad \sqrt[k]{a\,/\,b} = \sqrt[k]{a}\,/\,\sqrt[k]{b} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

(b) Beweisen Sie die folgende Regel (für festes $k \geq 2$):

$$a \leq b \;\Rightarrow\; \sqrt[k]{a} \leq \sqrt[k]{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

(c) Zeigen Sie ausgehend von der Definition der Konvergenz (für festes $k \geq 2$): Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = 0$.

(d) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n+1} \qquad\qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}+1}$$

Übung 20 (Häufungspunkte : 3 + 3 + 3 = 9 Punkte)
Man beweise oder widerlege:

(a) Ist eine Folge reeller Zahlen konvergent, so hat sie genau einen Häufungspunkt.

(b) Hat eine Folge reeller Zahlen genau einen Häufungspunkt, so ist sie konvergent.

(c) Es gibt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass die Menge der Häufungspunkte $[0, 1]$ ist.

Übung 21 (Konvergenz von Reihen : 3 + 8 = 11 Punkte)
(a) Beweisen Sie das *Wurzel-Kriterium*: Existiert zu einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ein q mit $0 < q < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$$

Abgabe: Freitag, 26. November 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 6 (Konvergenz von Folgen und Reihen)

Präsenzübung 13 (Falsche Beweise)
Wo steckt der Fehler in der folgenden Alternativ-„Lösung“ zu Übung 19 (c) ?

> Wir zeigen die Behauptung durch Kontraposition. Es ist also Folgendes zu zeigen (für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer reeller Zahlen):
>
> $$\text{Aus } \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} \neq 0 \text{ folgt } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\ .$$
>
> Sei also $b := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} \neq 0$. Dann folgt nach den Grenzwertsätzen
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^k \underset{\text{GWS}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n}\right)^k = b^k \neq 0\,,$$
>
> was zu zeigen war.

Präsenzübung 14 (b-adische Brüche)
Beweisen Sie die folgenden Sätze aus der Vorlesung ($b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$):

(a) Jeder b-adische Bruch konvergiert gegen eine reelle Zahl.

Anleitung: Aus Vorlesung und Übungen kennen Sie verschiedene Konvergenz-Kriterien (Leibniz-Kriterium, Majoranten-Kriterium, Quotienten-Kriterium, Wurzel-Kriterium). Überprüfen Sie, welche Kriterien hier zum Ziel führen.

(b) Jede reelle Zahl lässt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln.

Falls Sie noch Zeit haben, können Sie über die folgenden Probleme nachdenken:

(c) Wann ist die Darstellung einer reellen Zahl durch einen b-adischen Bruch eindeutig?

(d) Wie lassen sich die Darstellungen der rationalen Zahlen charakterisieren?

Für die letzte Aufgabe hilft es vielleicht, zuerst die Fragen aus der 1. Vorlesung zu beantworten:
– Wie sieht die Dezimalbruchdarstellung zum Bruch $\frac{6}{7}$ aus?
– Wie sieht die Bruchdarstellung zum Dezimalbruch $0.1\overline{36}$ aus?
„Dezimalbruch“ bedeutet natürlich, dass in der Definition des b-adischen Bruches $b := 10$ zu setzen ist . . .