

Übungen zur Analysis I

Blatt 7 (Konvergenz – Exponentialfunktion – Teilmengen von $\mathbb{R}$)

Wichtiger Hinweis:

Von nun an dürfen Sie auch zu zweit mit jemandem anderen aus Ihrem Tutorium abgeben. Allerdings muss jeder von Ihnen jede abgegebene Aufgabe vertreten (z. B. vorrechnen) können.

Übung 22 (Sätze über unendliche Reihen : jeweils 3 = 9 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k x^n) = 0$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes zum Cauchy-Produkt:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ absolut konvergent mit $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(c) Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:

Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent.

Übung 23 (Grenzwerte : jeweils 3 = 9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \quad (a > 0) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

Übung 24 (Exponentialfunktion : 3 + 3 = 6 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$. Dabei bezeichnet $e := \exp(1)$ die *Euler'sche Zahl*.
- (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $x < y$ folgt $\exp(x) < \exp(y)$. Die Exponentialfunktion ist also *streng monoton wachsend*.

Übung 25 (Rationale Zahlen : 3 + 3 = 6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass jedes nicht-leere offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ unendlich viele rationale Zahlen enthält:

- (a) Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so existiert eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.
- (b) Folgern Sie: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so existieren unendlich viele rationale Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

Hinweis zu Teil (a): Betrachten Sie für geeignetes $q \in \mathbb{N}$ das Gitter $\Gamma_q := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$.

Abgabe: Freitag, 3. Dezember 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 7 (Wiederholungsaufgaben)

Präsenzübung 15

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Präsenzübung 16

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^4 - 2n^2 + 5}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Präsenzübung 17

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Jede Folge positiver reeller Zahlen, die monoton fallend ist, konvergiert gegen Null.

(b) Jede Folge positiver reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert, ist monoton fallend.

(c) Sind (a_n) und (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.