Übungen zur Analysis I

Blatt 8 (Teilmengen von $\mathbb{R}$ – Stetigkeit)

Die Übungen 26 und 27 sollen bearbeitet, aber nicht abgegeben werden. Es wird jedoch erwartet, dass Sie bei der Besprechung im Tutorium Beiträge zur Lösung liefern können.

Übung 26 (Offene Mengen : 0 Punkte)
Beweisen Sie: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset U$ existiert.

Übung 27 (limsup und liminf : 0 Punkte)
Es seien (a_n) und (b_n) zwei beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \qquad \liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

Finden Sie Beispiele, in denen die Ungleichheit gilt. Was passiert, wenn eine der beiden Folgen als konvergent vorausgesetzt wird?

Übung 28 (Stetigkeit I : 10 Punkte)
Zeigen Sie ausgehend von der ε-δ-Definition (also ohne die Sätze über stetige Funktionen zu verwenden!), dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x \mapsto x^2$ stetig ist.

Übung 29 (Stetigkeit II : 10 Punkte)
Zeigen Sie ausgehend von der ε-δ-Definition (also ohne die Sätze über stetige Funktionen zu verwenden!), dass die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \;\; x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist.
Hinweis:
Überlegen Sie sich, dass $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ $(x \geq -1)$ sowie $\sqrt{1-x} \geq 1-x$ $(0 \leq x \leq 1)$ gilt.

Abgabe: Freitag, 10. Dezember 2010, 12.00 Uhr.

Hinweise zur Probeklausur am Montag, den 13. Dezember 2010 (1. Teil)

- Die Probeklausur zur Analysis I findet am Montag, den 13. Dezember 2010 in der Zeit von ca. 18:00 bis ca. 20:00 in den Hörsälen H4, H13, H14 statt. Seien Sie bitte pünktlich! Eine Anmeldung zur Probeklausur ist nicht erforderlich.
- Informationen zur Aufteilung auf die Hörsäle bzw. zur Sitzverteilung in den Hörsälen werden noch bekanntgegeben.
- Zur Probeklausur sollten Sie einen dokumentenechten Stift (Füller oder Kugelschreiber; blau oder schwarz) und beidseitig leeres DIN-A4-Papier (mind. 10 Blätter) mitbringen. Taschen sind außerhalb des Hörsaales oder am Rande des Hörsaales zu lassen.
- Die Verwendung von Unterlagen (Bücher, Vorlesungsmitschriften, Übungsblätter, ...) und Hilfsmitteln (Taschenrechner, Computer, Handy, ...) ist nicht gestattet.
- Die Klausuraufgaben orientieren sich in etwa an den Übungsaufgaben, wobei natürlich berücksichtigt wird, dass die Zeit in der Klausur knapp ist.
- Achten Sie darauf, sich die Zeit gut einzuteilen! Beachten sie dabei die Punktzahlen, die in den einzelnen Aufgaben erreicht werden können.
- Denken Sie daran, Ihre Ausführungen in der Probeklausur ausreichend zu begründen. Insbesondere sollten Sie (zumindest bei wichtigeren Sätzen) stets angeben, welchen Satz Sie gerade verwenden!

Universität Bielefeld Wintersemester 2010/2011

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 8 (Wiederholungsaufgaben)

Präsenzübung 18
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3n^2}{4n-5n^2} \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+1}$$

Präsenzübung 19
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-6n+10}$$

Präsenzübung 20
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ reelle Zahlen. Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = x^2$.

(b) Seien $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ reelle Zahlen. Aus $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = x^2$ folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(c) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq a$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest), so ist die unendliche Reihe konvergent mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a$.

(d) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe mit $a_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^{N} a_n < a$ für alle $N \in \mathbb{N}$ ($a \in \mathbb{R}$ fest), so ist die unendliche Reihe konvergent mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < a$.

Hinweise zur Probeklausur am Montag, den 13. Dezember 2010 (2. Teil)

- Klausurrelevant ist der bisherige Stoff aus der Vorlesung und den Übungen bis Blatt 7 (einschließlich). Nicht klausurrelevant ist ausschließlich in den Präsenzübungen oder in der Ergänzungsvorlesung behandelter Stoff. (Wenn also in den Präsenzübungen oder in der Ergänzungsvorlesung etwas angesprochen worden ist, das auch in der Vorlesung oder den Übungen vorgekommen ist, kann das natürlich klausurrelevant sein!)
- Neben den Definitionen und Sätzen aus der Vorlesung sollten Sie auch einige Begriffe und Ergebnisse aus den Übungen kennen, *beispielsweise*
  - die Bernoulli'sche Ungleichung (Übung 9 (c)),
  - den Zusatz zur Dreiecksungleichung (Übung 12),
  - das „Sandwich-Theorem“ (Besprechung von Blatt 4),
  - die Formel für die endliche geometrische Reihe (Übung 15 (a)),
  - die Eigenschaften der k-ten Wurzel (Übung 19),
  - das Wurzel-Kriterium (Übung 21 (a)),
  - den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0$ ($k \in \mathbb{N}$, $|x| < 1$) (Übung 22 (a)),
  - die Konvergenz der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$) (Übung 22 (c)),
  - die strenge Monotonie der Exponentialfunktion (Übung 24 (b)).

  Auch einige grundlegende Beobachtungen zu Grenzwerten aus den Präsenzübungen (insbesondere Präsenzübung $10+11$) sollten Ihnen vertraut sein.