

Übungen zur Analysis I

Blatt 9 (Funktionen – Stetigkeit)

Übung 30 (Stetigkeit : jeweils 3 = 9 Punkte)

Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktionen f_i stetig sind:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 1 ; & x \in \mathbb{Q} \\ 0 ; & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 3x ; & x \geq 0 \\ 2x ; & x < 0 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x + 1 ; & x \geq \sqrt{2} \\ x - 1 ; & x < \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Untersuchen Sie außerdem, in welchen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ die Einschränkungen $f_i|_{\mathbb{Q}}$ stetig sind.

Erläuterung: Sind X, Y beliebige nicht-leere Mengen, ist $f : X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung und ist $A \subset X$ eine beliebige nicht-leere Teilmenge von X , so ist die *Einschränkung* von f auf A die Abbildung $g : A \rightarrow Y$ mit $g(a) := f(a)$ für alle $a \in A$. Diese Abbildung wird auch mit $f|_A$ bezeichnet.

Übung 31 (Lösungen von Gleichungen : 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^6 = 1 - x$ in $\mathbb{R}_+$ genau eine Lösung besitzt.

Übung 32 (Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit : 5 + 5 = 10 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig bzw. gleichmäßig stetig sind:

$$\text{(a)} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3 \qquad \text{(b)} \quad h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

Hinweis: Anders als in Übung 28 und 29 sollen Sie dieses Mal (für die Stetigkeit) die Sätze über stetige Funktionen verwenden.

Übung 33 (Exponentialfunktion : 6 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ($x \in \mathbb{R}$), so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Insbesondere gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

Für die Euler'sche Zahl e ergibt sich damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

diese Formel ist Ihnen vielleicht schon in der Schule begegnet.

Abgabe: Freitag, 17. Dezember 2010, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 9 (Teilmengen von $\mathbb{R}$ – Funktionen – Stetigkeit)

Präsenzübung 21 (Teilmengen von $\mathbb{R}$)

Geben Sie für die Menge

$$A := \left\{ \frac{2^n}{2^n + 1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}$$

(jeweils mit Begründung) die Menge der Berührungspunkte, die Menge der Häufungspunkte, das Supremum sowie das Infimum an.

Präsenzübung 22 (Funktionen / Stetigkeit)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f injektiv, aber nicht surjektiv ist.
- (b) Ändern Sie den Wertebereich der Funktion f so ab, dass eine bijektive Funktion g entsteht, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} .
- (c) Untersuchen Sie, ob die Funktion f stetig ist.
- (d) Untersuchen Sie, ob die Funktion f gleichmäßig stetig ist.
- (e) Entscheiden Sie, ob sich die Funktion f zu einer stetigen Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.