Übungen zur Analysis I

Blatt 10 (Funktionen – Differenzierbarkeit)

Übung 34 (Differenzierbarkeit : 3 + 4 + 3 = 10 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ differenzierbar sind:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x & ; \; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(x) - 1 & ; \; x \geq 0 \\ x & ; \; x < 0 \end{cases}$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x \cdot |x|$

Übung 35 (Differenzierbarkeit : jeweils 2 = 10 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Differenzierbarkeit, und bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ (falls existent):

(a) $f(x) = x^2 \exp(x)$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4} \qquad (x \neq \pm 2)$

(c) $f(x) = \sqrt[k]{x^2 + 1} \qquad$ (wobei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fest)

(d) $f(x) = \log(1 + x^4)$

(e) $f(x) = x^x \qquad (x > 0)$

Hinweis zu Teil (e): Definitionsgemäß gilt $x^x := \exp(x \log x)$.

Die folgende Übung 36 soll bearbeitet, aber nicht abgegeben werden. Es wird jedoch erwartet, dass Sie bei der Besprechung im Tutorium in der Woche vom 10.01.2011 bis 14.01.2011 Beiträge zur Lösung liefern können.

Übung 36 (Wiederholungsübung : 0 Punkte)

Sei $a_n := \dfrac{2n}{3n - 4^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton ist.

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ (falls existent).

(c) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + a_n)^n$ (falls existent).

(d) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Abgabe: Mittwoch (!!!), 22. Dezember 2010, 10.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 10 (Funktionen – Stetigkeit – Differenzierbarkeit)

Falls Sie noch Fragen zur Probe-Klausur zur Analysis I haben, können Sie sie in der Präsenzübung untereinander bzw. gemeinsam mit Ihrem Tutor / Ihrer Tutorin besprechen.

Präsenzübung 23 (Funktionen / Differenzierbarkeit)
Indem man die Zuordnungen $x \mapsto \sqrt{x}$ und $x \mapsto \log x$ (in unterschiedlicher Reihenfolge) hintereinander schaltet, erhält man die Zuordnungen

$$x \mapsto \log \sqrt{x} \qquad \text{und} \qquad x \mapsto \sqrt{\log x}\,.$$

(a) Geben Sie zu diesen beiden Zuordnungen (möglichst große) Definitionsbereiche $\subset \mathbb{R}$ an. Die entstehenden reellwertigen Funktionen seien mit f bzw. g bezeichnet.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten ihres jeweiligen Definitionsbereiches die Funktionen f und g stetig sind.

(c) Untersuchen Sie, in welchen Punkten ihres jeweiligen Definitionsbereiches die Funktionen f und g differenzierbar sind, und bestimmen Sie ggf. die Ableitung.