Übungen zur Analysis I

Blatt 11 (Funktionen)

Übung 37 (Rationale Funktionen : 2 + 3 + 5 = 10 Punkte)
Gegeben sei die rationale Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\,,$$

wobei $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x^2 - x + 1 = 0\}$.

(a) Beschreiben Sie die Menge A möglichst einfach.

(b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in A$ die Funktion f stetig bzw. differenzierbar fortsetzbar ist.

(c) Die Funktion, die man durch stetige Fortsetzung von f erhält, sei mit g bezeichnet. Bestimmen Sie das Bild von g (d. h. die Menge $\{g(x) \,|\, x$ liegt im Definitionsbereich von $g\}$).

Übung 38 (Grenzwerte von Funktionen : jeweils 2 = 8 Punkte)
Sei $\alpha > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie:

$$\text{(i)} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{(iv)} \lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0$$

Die Teile (a) und (e) der folgenden Übung sollen Sie für sich bearbeiten, aber nicht abgeben:

Übung 39 (Hyperbelfunktionen : 0 + 3 + 6 + 3 + 0 = 12 Punkte)
Die *Hyperbelfunktionen* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, +1)$ sind definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) := \frac{e^{+x} + e^{-x}}{2}\,, \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

Die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}$, $\operatorname{arcosh} := (\cosh|_{[0,\infty[})^{-1}$, $\operatorname{artanh} := \tanh^{-1}$ heißen auch *Areafunktionen*.

(a) Beweisen Sie die folgenden Formeln (für $x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \end{aligned} \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Hyperbelfunktionen (falls existent).
Hinweis: Ein Verweis auf die unbewiesenen Ergebnisse aus der Vorlesung reicht nicht aus.

(c) Zeigen Sie, dass die o. g. Umkehrfunktionen existieren, und bestimmen Sie die Ableitungen dieser Umkehrfunktionen (falls existent).

(d) Zeigen Sie, dass $|\tanh x - \tanh y| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(e) Wir betrachten die *Hyperbel* $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \,\wedge\, x > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to H$ mit $\varphi(t) := (\cosh t, \sinh t)$ bijektiv ist. Die Hyperbelfunktionen cosh und sinh erlauben also eine *Parametrisierung* der Hyperbel.

Bemerkung: Eine weitere Hyperbelfunktion ist $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus [-1, +1]$ mit Umkehrfunktion $\operatorname{arcoth} := \coth^{-1}$. – Graphische Darstellungen der Hyperbel- und Areafunktionen (sowie einiger weiterer Funktionen) finden Sie auf der Homepage zur Analysis I.

Übung 40 finden Sie unten auf der Seite mit den Präsenzübungen.

Abgabe: Freitag, 14. Januar 2011, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 11 (Differenziation)

Präsenzübung 24 (Leibniz-Regel)
Beweisen Sie die Leibniz-Regel: Für $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in \mathscr{C}^{(n)}$ gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

Präsenzübung 25 (Differenziation)
Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (falls existent):

(i) $f(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{R},\, x > 0)$

(ii) $f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R},\, a > 0)$

(iii) $f(x) = x^x$

(iv) $f(x) = (x^x)^x$

(v) $f(x) = x^{x^x} \; \left[:= x^{(x^x)} \right]$

(vi) $f(x) = \exp(-x^2)$

(vii) $f(x) = \exp(\sqrt{x^3 + 1}) \quad (x > 0)$

(viii) $f(x) = \log(x^2 + x + 1)$

(ix) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1} \quad (x > 0)$

(x) $f(x) = x \exp(x) \log(x) \quad (x > 0)$

Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie Ableitungsregeln für das Produkt und die Komposition von drei [oder mehr] differenzierbaren Funktionen f_1, f_2, f_3 $[\ldots]$ formulieren. Oder Sie können für die Funktionen (i) – (iii) untersuchen, wo sie streng monoton wachsend bzw. fallend sind.

Übung 40 (Sternchen-Aufgabe : jeweils 2* = 12* Punkte)

Setze $a_n := \dfrac{2n^2}{3n^2 + (-1)^n n}$ und $b_n := \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n^3 + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ (falls existent).

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(b_n)$ (falls existent).

Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften stetiger Funktionen.

(c) Untersuchen Sie, ob die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren.

Wichtiger Hinweis: Mit dieser Sternchen-Aufgabe können Sie Ihren Punktestand aufbessern. Allerdings darf Ihre Lösung nicht länger als eine einseitig beschriebene DIN-A4-Seite sein (in normaler Schriftgröße); ansonsten wird sie nicht korrigiert und bringt auch keine Punkte.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest
und einen guten Start ins neue Jahr 2011.