Übungen zur Analysis I

Blatt 12 (Grenzwerte von Funktionen / Komplexe Zahlen)

Übung 41 (Grenzwerte von Funktionen : jeweils 2 = 12 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^3+a}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[5]{1+x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+x}-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Dabei sei $a > 0$ eine feste reelle Zahl.

Übung 42 (Grenzwerte von Folgen : jeweils 2 = 6 Punkte)
Viele Grenzwerte, deren Bestimmung mit elementaren Mitteln etwas schwieriger gewesen ist, lassen sich nun mit Hilfe der allgemeinen Potenz $a^b = \exp(b \log a)$ und mit den Eigenschaften von exp und log deutlich einfacher bestimmen. Überzeugen Sie sich selbst davon, indem Sie die folgenden Grenzwerte bestimmen:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp(a) \quad (a \in \mathbb{R})$

Übung 43 (Komplexe Zahlen : 2 + 2 + 4 = 8 Punkte)

(a) Gegeben seien $z = 1 + 2\mathrm{i}$ und $w = 3 + 4\mathrm{i}$. Stellen Sie $z + w$, $z - w$, $z \cdot w$ und $z\,/\,w$ jeweils in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 + z^2 + 2z + 2 = 0$ in $\mathbb{C}$.

(c) Es seien $z \in \mathbb{C}$ eine fest gewählte komplexe Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_n := \left(\mathrm{i} + \frac{z}{n^2}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge komplexer Zahlen. Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und bestimmen Sie ihre Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.

Übung 44 (Differenzierbare Funktionen : 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'. Zeigen Sie darüber hinaus, dass die Ableitungsfunktion f' nicht stetig ist.

Abgabe: Freitag, 21. Januar 2011, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 12 (Grenzwerte von Funktionen)

Präsenzübung 26 (Grenzwerte von Funktionen)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$

Präsenzübung 27 (Komplexe Zahlen)

(a) Wir betrachten den *Einheitskreis* $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass $u : \mathbb{R} \to S$ mit $u(t) := (\cos t, \sin t)$ surjektiv ist und dass die Einschränkung $u|_{[0,2\pi[}$ (bzw. die Einschränkung auf ein beliebiges anderes halboffenes Intervall der Länge 2π) bijektiv ist. Die trigonometrischen Funktionen cos und sin erlauben also eine *Parametrisierung* des Einheitskreises.

(b) Folgern Sie: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ darstellen. Diese Darstellung heißt auch *Polarkoordinatendarstellung* von z.

(c) Untersuchen Sie, inwieweit die Polarkoordinatendarstellung eindeutig bestimmt ist.

(d) Wie lässt sich die komplexe Multiplikation mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung beschreiben?

(e) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ die Lösungsmenge $\mathfrak{L}_n$ der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ und skizzieren Sie diese Menge (in der komplexen Zahlenebene).

(f) Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt $\sum\limits_{z \in \mathfrak{L}_n} z = 0$.