Übungen zur Analysis I

Blatt 13 (Riemann-Integration)

Übung 45 (Grenzwerte von Funktionen : 4 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls existent):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arccos x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x| \tanh x}{\cosh x - 1}$$

Übung 46 (Riemann-Integrierbarkeit : 4 + 4 = 8 Punkte)

(a) Sei $x > 1$. Zeigen Sie *ohne Verwendung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung*, dass die Funktion $f : [1, x] \to \mathbb{R} \quad t \mapsto 1/t$ Riemann-integrierbar ist mit $\int_1^x f(t)\, dt = \log x$. (*Hinweis:* Bestimmen Sie Ober- und Untersumme zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n : z_0 < z_1 < \ldots < z_n$ mit $z_k := x^{k/n}$, $k = 0, \ldots, n$.)

(b) Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a < b$ und $c < d$, sei $f : [a, b] \to [c, d]$ Riemann-integrierbar, und sei $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. (*Hinweis:* Orientieren Sie sich am Beweis aus der Vorlesung, dass mit f auch $|f|^p$ $(p \geq 1)$ Riemann-integrierbar ist.)

Übung 47 (Integration : jeweils 2 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int x^2 \exp(ax)\, dx \qquad (a > 0)$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{x^2 - 4}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}\, dx$

(d) $\displaystyle\int \log x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \qquad (a > 0)$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$

(*Zusatz:* Was bedeutet das für den Flächeninhalt eines Kreises?)

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(*Hinweis:* Setzt man $u := \tan \frac{x}{2}$, so gilt $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.)

Übung 48 (Rekursionsformel : 4 Punkte)
Sei $I_n := \int \cos^n x\, dx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$I_0 = x\,, \qquad I_1 = \sin x\,, \qquad I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \cdot \sin x \cos^{n+1} x + \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Damit lassen sich die Integrale I_n rekursiv berechnen.

Abgabe: Freitag, 28. Januar 2011, 12.00 Uhr.

Präsenzübungen zur Analysis I

Blatt 13 (Riemann-Integration)

Präsenzübung 28 (Ableitungen der Arcus-Funktionen : 5 Punkte)
Berechnen Sie - zur Vervollständigung der Vorlesung – die Ableitungen der Arcus-Funktionen arcsin, arccos, arctan, arccot.

Präsenzübung 29 (Integration)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int \sin(2x)\ dx$

(b) $\int x\ \sin(2x)\ dx$

(c) $\int x^2\ \sin(2x)\ dx$

(d) $\int e^x\ \sin(2x)\ dx$

(e) $\int \sin x\ \sin(2x)\ dx$

(f) $\int \sqrt{1+x^2}\ dx$

(g) $\int x\sqrt{1+x^2}\ dx$

(h) $\int x^2\sqrt{1+x^2}\ dx$

(i) $\int |x|\ dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\ dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}\ dx$

(l) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx$