Ergänzungsübungen zur Analysis I

Blatt 1 (Grenzwertbegriff)

Ergänzungsübung 1
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen eine reelle Zahl a, wenn gilt:

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon\,. \tag{$*$}$$

Um die Bedingung $(*)$ besser zu verstehen, kann man ähnliche Bedingungen betrachten:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)}\ (\forall\varepsilon > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n - a| < \varepsilon\\
&\text{(ii)}\ (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n \in \mathbb{N})\ |a_n - a| < \varepsilon\\
&\text{(iii)}\ (\forall\varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon\\
&\text{(iv)}\ (\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\forall n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon\\
&\text{(v)}\ (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N)\ |a_n - a| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Beschreiben Sie verbal, welche Folgen diese Bedingungen erfüllen, und untersuchen Sie, in welcher Beziehung diese Bedingungen zur Bedingung $(*)$ stehen.

Hinweise:

(a) Vielleicht hilft es Ihnen, wenn Sie zuerst geeignete Beispiele untersuchen und entscheiden, welche Bedingungen für $a = 0$ von den Folgen $(0,0,0,\ldots)$, $(1,2,3,\ldots)$, $(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots)$, $(1,2,3,\ldots,k,0,0,0,\ldots)$, $(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},0,0,0,\ldots)$, $(0,1,0,2,0,3,\ldots)$, $(0,\frac{1}{1},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},\ldots)$ erfüllt werden (wobei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest).

(b) Bei einigen verbalen Beschreibungen ist es ratsam, auf den Begriff des Häufungspunktes zurückgreifen.

Ergänzungsübung 2
Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$ auf Konvergenz ...

(a) ohne Verwendung der Grenzwertsätze,

(b) mit Verwendung der Grenzwertsätze.

Ergänzungsübung 3
Beweisen Sie das sog. *Sandwich-Theorem*:

> Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, wobei die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert x konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Wenn Sie den Beweis schon aus den Übungen kennen, versuchen Sie, ihn zu reproduzieren (aus der Erinnerung oder durch eigenes Nachdenken).

Besprechung: Montag, 22.11.2010