Partialbruchzerlegung I

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung. Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{C}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.
Beispiel: $z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z-i)(z+i)$.

Satz. Sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ rationale Funktion über $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, wobei $Q(z) = (z-\zeta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (z-\zeta_k)^{p_k}$ mit $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ paarweise verschieden. Dann existiert eine eindeutige Darstellung

$$R(z) = \sum_{h=1}^{k} \left(\frac{a_{h1}}{(z-\zeta_h)^1} + \frac{a_{h2}}{(z-\zeta_h)^2} + \ldots + \frac{a_{hp_h}}{(z-\zeta_h)^{p_h}} \right)$$

mit $a_{h1}, \ldots, a_{hp_h} \in \mathbb{C}$, die *Partialbruchzerlegung* von $R(z)$.

Partialbruchzerlegung II

Beobachtung. Für jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{R}$ ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine (m-fache) Nullstelle g. d. w. $\overline{\zeta} \in \mathbb{C}$ eine (m-fache) Nullstelle ist. Das Produkt der entsprechenden Linearfaktoren ist $(z-\zeta)(z-\overline{\zeta}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta)z + |\zeta|^2$, also ein quadratisches Polynom über $\mathbb{R}$. Jedes nicht-konstante Polynom über $\mathbb{R}$ zerfällt daher über $\mathbb{R}$ in "unzerlegbare" lineare und quadratische Faktoren.

Beispiel: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$.

Satz. Sei $R(x) = P(x)/Q(x)$ rationale Funktion über $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, wobei $Q(x) = (x-\zeta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x-\zeta_k)^{p_k} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$ wie oben. Dann existiert eine eindeutige Darstellung

$$R(x) = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_h} \frac{a_{hj}}{(x-\zeta_h)^j} + \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_h} \frac{b_{hj}x + c_{hj}}{(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^j}$$

mit $a_{hj}, b_{hj}, c_{hj} \in \mathbb{R}$, die (reelle) *Partialbruchzerlegung* von $R(x)$.

Partialbruchzerlegung III (Integration rationaler Funktionen)

Will man eine rationale Funktion $R(x) = P(x)/Q(x)$ integrieren, so kann man "systematisch" wie folgt vorgehen:

- ggf. Polynomdivision, damit $\operatorname{grad} P(x) < \operatorname{grad} Q(x)$
- Zerlegung von $Q(x)$ in "unzerlegbare" lineare und quadratische Faktoren
- Ansatz (nach dem vorherigen Satz)

$$R(x) = \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_h} \frac{a_{hj}}{(x-\zeta_h)^j} + \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_h} \frac{b_{hj}x + c_{hj}}{(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^j},$$

- Bestimmung der Koeffizienten a_{hj}, b_{hj}, c_{hj} (z. B. durch Multiplikation mit $Q(x)$ & Koeffizientenvergleich; lineares Gleichungssystem)

Da sich zu den "Partialbrüchen" Stammfunktionen angeben lassen, lassen sich damit (im Prinzip) beliebige rationale Funktionen integrieren.

Partialbruchzerlegung IV (Stammfunktionen der Partialbrüche)

$$\int \frac{1}{x-\zeta}\, dx = 1 \log|x-\zeta|\,,$$

$$\int \frac{1}{(x-\zeta)^n}\, dx = -\frac{1}{(n-1)(x-\zeta)^{n-1}} \qquad (n>1)\,,$$

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\, dx = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \arctan \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\,,$$

$$\int \frac{x}{x^2+\alpha x+\beta}\, dx = \frac{1}{2}\log(x^2+\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \arctan \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\,,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\, dx = \ldots \ \text{(Rekursionsformel)} \qquad (n>1)\,,$$

$$\int \frac{x}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\, dx = \ldots \ \text{(Rekursionsformel)} \qquad (n>1)\,,$$

(Da voraussetzungsgemäß $x^2+\alpha x+\beta>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, gilt $4\beta-\alpha^2>0$.)

Beispiel: $\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = ?$

Da $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, wobei x^2+x+1 nullstellenfrei in $\mathbb{R}$ und somit unzerlegbar über $\mathbb{R}$, macht man den Ansatz

$$
\begin{aligned}
&& \frac{3x^2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
&\Leftrightarrow & \frac{3x^2}{x^3-1} &= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
&\underset{\substack{\text{Koeffizienten-}\\\text{vergleich}}}{\Leftrightarrow} & & A+B=3 \wedge A-B+C=0 \wedge A-C=0 \\
&\underset{\text{LGS lösen}}{\Leftrightarrow} & & A=1 \wedge B=2 \wedge C=1.
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Nun gilt allgemein

$$\int \frac{A}{x-\zeta}\,dx = A\log|x-\zeta|\,,$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \frac{1}{2}B\log(x^2+\alpha x+\beta) + \frac{2C-B\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\arctan\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\,,$$

wie man der obigen Tabelle entnimmt, also

$$\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = \log|x-1| + \log(x^2+x+1)\,.$$

Allerdings geht es – im vorliegenden Beispiel – auch sehr viel einfacher: Der Integrand ist vom Typ $f'(x)/f(x)$ (wobei $f(x) := x^3-1$); somit folgt nach der Regel von der Integration „logarithmischer Ableitungen“ sofort

$$\int \frac{3x^2}{x^3-1}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| = \log|x^3-1|\,.$$

(*Warum ist das Ergebnis dasselbe wie oben?*)