# Einige Anmerkungen zur Integration

Ohne Beweis sei Folgendes angemerkt: Es gibt „elementare“ Funktionen, die keine „elementaren“ Stammfunktionen besitzen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist $f(x) = e^{x^2}$.

Es lassen sich allerdings einige wichtige Klassen von Funktionen angeben, die „elementare“ Stammfunktionen besitzen:

(i) Polynome $P(x)$ : klar!

(ii) rationale Funktionen $R(x) = P(x)/Q(x)$ ($P(x), Q(x)$ Polynome) : Partialbruchzerlegung! ($\rightarrow$ Übung 47 (b))

Die nachfolgenden Klassen von Funktionen lassen sich durch Substitution auf rationale Funktionen zurückführen ($R(T)$ := rationaler Ausdruck in $T$) und besitzen daher ebenfalls “elementare” Stammfunktionen:

(iii) $R(x, \sqrt[k]{ax+b})$ : Subst. $y = \sqrt[k]{ax+b}$

(iv) $R(\exp(ax))$ : Subst. $y = \exp(ax)$ ($\rightarrow$ Übung 47 (c))

(v) $R(\sin(ax), \cos(\alpha x))$ : Subst. $t = \tan(ax/2)$ ($\rightarrow$ Übung 47 (g))

$$t = \tan(x/2) \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(vi) $R(\sinh(ax), \cosh(ax))$ : Subst. $y = \exp(ax)$ $\Big[$ *auch:* $y = \tanh(ax/2)$ $\Big]$

(vii) $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\ dx$ : Subst. $x = a \sin t \rightarrow$ Klasse (v)

(viii) $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})\ dx$ : Subst. $x = a \sinh t \rightarrow$ Klasse (vi)

(ix) $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\ dx$ : Subst. $x = a \cosh t \rightarrow$ Klasse (vi)

(x) $R(x, \sqrt{x^2 + px + q})$ : Subst. $y = x + \frac{1}{2}p \rightarrow$ Klassen (vii) – (ix)

Im Einzelfall können allerdings andere Wege schneller zum Ziel führen!