Rechenregeln für die reellen Zahlen

(1.1) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$. (*Assoziativgesetz*)

(1.2) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x + y = y + x$. (*Kommutativgesetz*)

(1.3) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$, so dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
0 heißt *die Null*.

(1.4) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein Element $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.
y heißt *das Negative von x*, kurz $-x$.

(1.5) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. (*Assoziativgesetz*)

(1.6) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$. (*Kommutativgesetz*)

(1.7) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$, so dass $x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
1 heißt *die Eins*.

(1.8) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ existiert ein Element $y \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot y = 1$.
y heißt *das Inverse von x*, kurz x^{-1}.

(1.9) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. (*Distributivgesetz*)

(1.10) Die Null ist eindeutig bestimmt.
(*Bemerkung:* Damit ist es wirklich gerechtfertigt, von *der* Null zu sprechen.)

(1.11) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ist das Negative bestimmt.
(*Bemerkung:* Damit ist es wirklich gerechtfertigt, von *dem* Negativen zu sprechen.)

(1.12) Es gilt $0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1.13) Es gilt $(-x) + x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1.14) Es gilt $-0 = 0$.

(1.15) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ (in x) genau eine Lösung, nämlich $b + (-a)$.

(1.16) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$.

(1.17) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

(1.18) Die Eins ist eindeutig bestimmt.
(*Bemerkung:* Damit ist es wirklich gerechtfertigt, von *der* Eins sprechen.)

(1.19) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ist das Inverse eindeutig bestimmt.
(*Bemerkung:* Damit ist es wirklich gerechtfertigt, von *dem* Inversen sprechen.)

(1.20) Es gilt $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(1.21) Es gilt $x^{-1} \cdot x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$.

(1.22) Es gilt $1^{-1} = 1$.

(1.23) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ (in x) genau eine Lösung, nämlich $b \cdot a^{-1}$.

(1.24) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(1.25) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

(1.26) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \cdot x = 0$.

(1.27) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

(1.28) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$.

(1.29) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

(1.30) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(1.31) In Summen und Produkten darf man beliebig klammern.
(*Verallgemeinertes Assoziativgesetz*)

(1.32) In Summen und Produkten darf man beliebig umordnen.
(*Verallgemeinertes Kommutativgesetz*)

(1.33) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ gilt $(x_1 + \ldots + x_m)(y_1 + \ldots + y_n) = x_1y_1 + \ldots + x_1y_n \; + \; \ldots \; + \; x_my_1 + \ldots + x_my_n$.
(*Verallgemeinertes Distributivgesetz*)

(1.34) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.
Falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$, gilt dies sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(1.35) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.
Falls $x \neq 0$, gilt dies sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.

(1.36) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(x^m)^n = x^{mn}$.
Falls $x \neq 0$, gilt dies sogar für alle $m, n \in \mathbb{Z}$.