Funktionen

Übungsblatt 13

⋆ ⋆ ⋆

Zur Besprechung in der Woche 16.-20. Juli 2018

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Teil 1 - Wiederholung

Aufgabe 1.

1. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

2. Bestimmen Sie $\sup A$, $\inf A$, wobei $A = \{2 - \frac{2+n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$. Besitzt die Menge A ein Minimum bzw. Maximum?

Aufgabe 2.

1. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der algebraischen Form $a + ib$ dar:

$$\frac{5+i}{1-3i}; \qquad \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^2.$$

2. Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-1| = |z+1|\}; \qquad M_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon 1 \leq |z-i| \leq 2, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}.$$

Aufgabe 3. Sei $a_1 := 2$ und

$$a_{n+1} := \frac{2a_n + 1}{a_n + 2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n := \frac{1}{a_n}$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 4.

1. Schreiben Sie die Funktion
$$f(x) = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x + \sqrt{18}$$
in Normalform und zeichnen Sie Γ_f.

2. Schreiben Sie die Funktion
$$g(x) = \frac{6x-1}{2-3x}$$
in Normalform und zeichnen Sie Γ_g.

Teil 2

Aufgabe 5.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2-7x+6)}{x^2-3x+2}, & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 2 \\ a, & \text{falls } x = 1 \\ b, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, f in x_0 stetig ist.
2. Kann man die reellen Zahlen a und b so wählen, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist?

Aufgabe 6. Sei $D \subset \mathbb{R}$. Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ sei das Minimum $\min(f, g) : D \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\min(f, g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

für alle $x \in D$.

1. Zeigen Sie: sind f und g auf D stetig, so ist auch $\min(f, g)$ auf D stetig.
2. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$h(x) := |x| - x^2 - |x^2 + |x| - 2|$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass h stetig ist und zeichnen Sie den Graphen der Funktion h.

[*Tipp.* Zu 1.: Zeigen Sie zunächst, dass $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. Zu 2.: Können Sie h als $\min(f, g)$ für geeignete f, g schreiben?]

Aufgabe 7.

1. Zeigen Sie, dass $x \mapsto e^{\frac{1}{x^4+x^2+1}}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass für die Funktion
$$u(x) := e^{2x} - e^x + 1$$
gilt: $u(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

[*Tipp.* Zu 1.: Zeigen Sie zunächst, dass $f(t) = t^2 + t + 1 \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Hat die Funktion $h = f \circ g$, wobei $g(x) = x^2$, eine Nullstelle?]