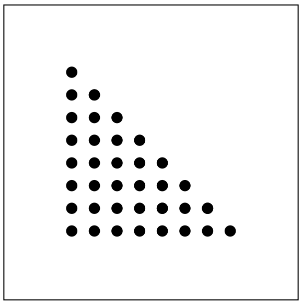
Funktionen

Übungsblatt 2

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **27. April 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.



Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)**.** Seien $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $Y := \{a, b, c, d, e\}$, wobei die Elemente a, b, c, d, e alle verschieden sind.

(a) Definieren Sie eine bijektive Abbildung $f: X \to Y$ mit den folgenden Eigenschaften:
- $f(2) = a$,
- $f^{-1}(b) = f^{-1}(a) + 3$,
- $f^{-1}(d) \leq f^{-1}(y) \ \forall y \in Y$,
- $f^{-1}(c) \leq f^{-1}(e)$.

(b) Sei jetzt $g: X \to X$, $g(x) := 6 - x$.
  (i) Zeigen Sie, dass g eine bijektive Abbildung ist.
  (ii) Bestimmen Sie die Menge $\{(g \circ g \circ g \circ g)^{-1}(3)\} \cap \{(g \circ g \circ g \circ g)^{-1}(4)\} \cap \{f^{-1}(c)\}$.

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ und sei $X_n := \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$.

(i) Wie viele bijektive Abbildungen $f: X_n \to X_n$ mit $f(1) = 1$ und $f(n) = n$ gibt es?

(ii) Wie viele bijektive Abbildungen $f: X_n \to X_n$ mit $f(\{1, 2, 3, 4\}) \subset \{1, 2, 3, 4\}$ gibt es?

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $S(n): \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(n) := \sum_{k=1}^{2n} k$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Identitäten für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- $S(n) = n(2n + 1) - 1$
- $S(n) = n(2n + 1) + 1$

- $S(n) = n(2n+1)$

[*Tipp.* Das obige Bild ist eine mögliche Veranschaulichung der Formel für $n = 4$.]

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $T(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $T(n) := \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Identitäten für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- $T(n) = (n+1)! - 1$
- $T(n) = (n+1)!$
- $T(n) = (n+1)! + 1$