Funktionen

Übungsblatt 3

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **4. Mai 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei X eine Menge der Mächtigkeit $|X| = n \in \mathbb{N}_0$. Sei $\mathcal{P}(X) = \{M : M \subset X\}$ die Potenzmenge von X. Zeigen Sie, dass

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n$$

gilt.

[*Tipp.* Benutzen Sie vollständige Induktion nach n. Falls $|X| \geq 1$, schreiben Sie $X = X' \cup \{x\}$ für ein $x \notin X'$. Unterscheiden Sie die Teilmengen $M \subset X$ danach, ob $x \in M$ oder $x \notin M$ gilt.]

Aufgabe 2 (1+3 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X_n := \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

(i) Wie viele Teilmengen $A \subset X_5$ gibt es derart, dass $|A| = 3$ und $3 \notin A$?

(ii) Sei $n \geq 3$. Wie viele Teilmengen $B \subset X_n$ mit $\{1, 2\} \subset B$ gibt es?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Seien X und Y endliche Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten.

(i) $|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y|$

(ii) $|X \triangle Y| = |X| + |Y| - 2|X \cap Y|$,
wobei $X \triangle Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

[*Tipp.* Können Sie die obigen Mengen als disjunkte Vereinigungen schreiben?]

Aufgabe 4 (1+1+1+1 Punkte)**.** Sei X_n wie in Aufgabe 2 definiert. Entscheiden Sie für jede der folgenden Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv, bzw. bijektiv ist.

$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, &\qquad x \mapsto x + 1 \\
f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, &\qquad x \mapsto 2x + 1 \\
f_3 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, &\qquad x \mapsto f_1(f_2(x)) \\
f_4 : \mathcal{P}(X_4) \to \{0\} \cup X_4, &\qquad M \mapsto |M|.
\end{aligned}$$