Sommersemester 2018 Angela Carnevale

**Funktionen**

Übungsblatt 4

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **11. Mai 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

*Begründen Sie alle Ihre Antworten.*

**Aufgabe 1** (3+1 Punkte)**.** (i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle reellen Zahlen $x > -1$ die **Bernoullische Ungleichung**

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. (Benutzen Sie vollständige Induktion nach $n$.)

(ii) Zeigen Sie, dass für $x \neq 0$ und $n \geq 2$ die Ungleichung in (i) echt ist.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl $x \neq 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

gilt. (Benutzen Sie vollständige Induktion nach $n$.)

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Ungleichung

$$2^n \leq n^2$$

gilt. [*Tipp.* Zeigen Sie, dass für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $2^n > n^2$ gilt. ]

**Aufgabe 4** (2+2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sei $f_n\colon \mathcal{P}(X_n) \to \{0\} \cup X_n$, $M \to |M|$.

(i) Finden Sie alle $i \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $f_i$ injektiv ist.

(ii) Sei $n = 5$. Finden Sie eine Teilmenge $Y \subset \mathcal{P}(X_5)$ derart, dass die Einschränkung $f_5\big|_Y : Y \to \{0\} \cup X_5$ bijektiv ist.