Sommersemester 2018 Angela Carnevale

Funktionen

Übungsblatt 5

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **18. Mai 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Sie dürfen nur die Körperaxiome K1–K9 benutzen. Für reelle Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0 \neq d$ gilt

(i)
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

(ii)
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

(iii)
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)**.** Für jede reelle Zahl a und natürliche Zahl n definieren wir die Potenz a^n per Induktion nach n wie folgt:

$$a^1 := a, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

(ii) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

(iii) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ leer sind.

(i) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 4 \leq 1\}$

(ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \colon -x^2 + 2x - |x| \geq 2\}$.

Aufgabe 4 (2 Bonuspunkte)**.** Seien $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \colon a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist.