

**Funktionen**

## Übungsblatt 6

\*\*\*

Abgabe bis 12 Uhr am **25. Mai 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

*Begründen Sie alle Ihre Antworten.*

**Aufgabe 1** (2+2 Punkte). Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen  $x, y$  gilt

(i)  $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$  und

(ii)  $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ .

**Definition.** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Zahl  $\frac{1}{2}(a + b)$  heißt das **arithmetische Mittel** von  $a$  und  $b$ . Seien  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$ . Die Zahl  $\sqrt{ab}$  heißt das **geometrische Mittel** von  $a$  und  $b$ .

**Aufgabe 2** (3+3 Punkte). (i) Zeigen Sie: Für  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  gilt die folgende Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b).$$

Zeigen Sie ferner, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn  $a = b$ .

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes: Für jede reelle Zahl  $x \geq 0$  und jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  gilt

$$(1 + x)^n > \frac{n^2}{4}x^2.$$

**Aufgabe 3** (2+2+2 Punkte). Für jede der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, falls diese existieren.

(i)  $A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \leq 100 \right\} \cup (-20, 0]$

(ii)  $B = \{x : |x - 4| < 3\} \cup \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

(iii)  $C = \mathbb{Z} \cap ([-5, 0) \cup (1, 5))$ .