

Funktionen

Übungsblatt 6

Abgabe bis 12 Uhr am **25. Mai 2018** im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte). Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen x, y gilt

(i) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und

(ii) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Zahl $\frac{1}{2}(a + b)$ heißt das **arithmetische Mittel** von a und b . Seien $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Die Zahl \sqrt{ab} heißt das **geometrische Mittel** von a und b .

Aufgabe 2 (3+3 Punkte). (i) Zeigen Sie: Für $a \geq 0, b \geq 0$ gilt die folgende Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b).$$

Zeigen Sie ferner, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn $a = b$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes: Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1 + x)^n > \frac{n^2}{4}x^2.$$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte). Für jede der folgenden Teilmengen von \mathbb{R} bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, falls diese existieren.

(i) $A = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \leq 100 \right\} \cup (-20, 0]$

(ii) $B = \{x : |x - 4| < 3\} \cup \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $C = \mathbb{Z} \cap ([-5, 0) \cup (1, 5))$.