Funktionen

Präsenzübungsblatt 10

⋆ ⋆ ⋆

Zur Besprechung am 25. Juni 2018

Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die die folgende Gleichung erfüllen
$$(y + 1)^3 + (1 - x)^3 = 2 + (y - x)(x^2 + y^2 + xy)$$
ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises.
2. Finden Sie alle Geraden ℓ durch $(0, 0)$ und derart, dass $|\ell \cap K_{M,r}| = 1$.

Aufgabe 2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $x_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 0$$
gilt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|1 - n| + \sqrt{n^2 - 1}}{n^2 + \sqrt{n}}.$$

Aufgabe 4. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Zeigen Sie oder wiederlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

- Ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
- Ist $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}}$$