Funktionen

Präsenzübungsblatt 11

⋆ ⋆ ⋆

Zur Besprechung am 2. Juli 2018

Definition. Eine Zahl h, $0 < h < 1$, teilt das Einheitsintervall $[0, 1]$ gemäß dem goldenen Schnitt, wenn

$$\frac{1}{h} = \frac{h}{1-h} \tag{1}$$

gilt.

Definition. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch die Rekursion

$$f_{n+1} := f_n + f_{n-1}, \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \qquad f_1 = f_2 = 1$$

definierte Folge der **Fibonacci-Zahlen**.

Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie: Es gibt genau eine reelle Zahl h mit $0 < h < 1$ und der Eigenschaft (1).
2. Das Verhältnis $g := \frac{h}{1-h}$ heißt **goldener Schnitt**. Bestimmen Sie g und zeigen Sie, dass g irrational ist.
3. Zeigen Sie:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = g.$$
4. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Aufgabe 2. Sei $a > 0$ und sei $x_1 > 0$ beliebig. Wir betrachten die durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Zeigen Sie, dass $x_n > 0$ und $x_n^2 \geq a$.
2. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
3. Schließen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.