Funktionen

Präsenzübungsblatt 12

⋆ ⋆ ⋆

Zur Besprechung am 9. Juli 2018

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Unter der reellen Potenz e^x der Eulerzahl e verstehen wir den Wert der Reihe

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

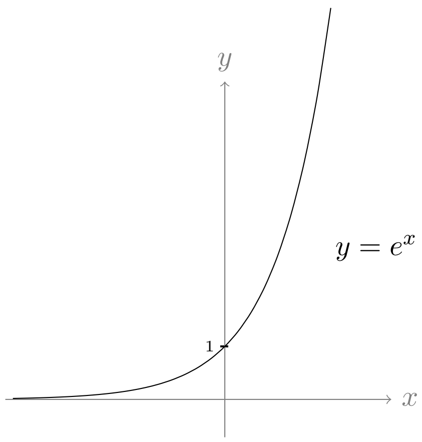
Aufgabe 1.

1. Zeigen Sie: für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt
$$|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{1 - |x|}.$$
2. Zeigen Sie: konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(e^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e^x.
3. Zeigen Sie, dass $x \mapsto \exp(x)$ streng monoton wachsend ist.

[*Tipp.* In 1. benutzen Sie das Majorantenkriterium für die geometrische Reihe.]

Bemerkung. In 2. haben Sie bewiesen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion **stetig** in x ist.

Aufgabe 2. Der Graph der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist



1. Sei $a > 0$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen:
$$f_1(x) := e^{x+a}, \quad f_2(x) := e^x - a, \quad f_3(x) := a \cdot e^x, \quad f_4(x) := e^{-ax}.$$

2. Skizzieren Sie den Graph der Funktion:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \exp^{-1}(x).$$

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-n^2}{n^2}\right) e^{\frac{n}{1-2n^2}}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n^2}}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$