Funktionen

Präsenzübungsblatt 2

⋆⋆⋆

Besprechung am 23. April 2018

Definition. Seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$. Dann heißt

$$f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \subset Y$$

das **Bild** von A unter f.

Aufgabe 1. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und seien $A, A_1, A_2 \subset X$. Zeigen Sie:

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(iii) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$.

Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass die Inklusionen in (ii) und (iii) i. Allg. *echt* sind.

Aufgabe 2. Seien f, g bijektive Abbildungen

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z.$$

Beweisen Sie die folgende Identität (*Umkehrabbildung der Komposition zweier Abbildungen*):

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Aufgabe 3. Seien M_1, M_2, M_3, M_4 die folgenden Mengen, wobei $A, B, C, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ alle verschieden sind.

$$M_1 = \{A, B, C\}, \qquad M_2 = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$M_3 = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \quad M_4 = \{\bullet\}$$

Definieren Sie Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften, oder erklären Sie, warum dies nicht möglich ist.

- eine Abbildung $f\colon M_4 \to M_2$;
- eine surjektive Abbildung $g\colon M_1 \to M_4$;
- eine Abbildung $h\colon M_2 \to M_3$ derart, dass das Urbild von $\heartsuit$ aus genau 2 Elementen besteht;
- eine bijektive Abbildung $p\colon M_2 \to M_3$;

- eine Abbildung $q\colon M_1 \to M_3$ derart, dass $\{x \in M_1 \colon f(x) = \clubsuit\} \cap \{x \in M_1 \colon f(x) = \Diamond\} = \{B\}$.

Aufgabe 4. (i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} 6n^2 = n(n+1)(2n+1)$$

gilt.

(ii) Finden Sie den Fehler in folgendem "Beweis":

Behauptung. Je endlich viele Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind alle gleich.

Beweis durch vollständige Induktion. Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $a_1 = a_1$, da jede Zahl zu sich selbst gleich ist. Nun sei die Behauptung für je n Zahlen richtig. Dann zeigen wir, dass sie auch für $n+1$ Zahlen richtig ist. Nach Induktionvoraussetzung gilt nämlich $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ und $a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$. Daraus folgt $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$.