Funktionen

Präsenzübungsblatt 4

⋆⋆⋆

Besprechung am 7. Mai 2018

Aufgabe 1. Seien $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Zeigen Sie: $f \circ g$ injektiv $\Longrightarrow g$ injektiv.

(ii) Gilt die Umkehrung in (i)?

(iii) Zeigen Sie: $f \circ g$ surjektiv $\Longrightarrow f$ surjektiv.

(iv) Gilt die Umkehrung in (iii)?

Aufgabe 2. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Ist f injektiv, so gibt es eine Abbildung $g\colon Y \to X$ derart, dass $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

(ii) Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $h\colon Y \to X$ derart, dass $f \circ h = \mathrm{Id}_Y$.

Diskutieren Sie die Existenz der Abbildungen g bzw. h im dem Fall, dass f jeweils eine der Abbildungen aus Aufgabe 4, Blatt 3 ist.

Reelle Zahlen – Körperaxiome

Zur Erinnerung. Die Menge der reellen Zahlen ist eine Menge $\mathbb{R}$ mit zwei Operationen $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(K1) Es existiert eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ derart, dass $0 + x = x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(K2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $-x \in \mathbb{R}$ derart, dass $x + (-x) = (-x) + x = 0$ gilt.

(K3) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(K4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = y + x$.

(K5) Es existiert eine Zahl $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derart, dass $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(K6) Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{R}$ derart, dass $x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$ gilt.

(K7) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(K8) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

(K9) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt: $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften alleine aus den Körperaxiomen K1-K9 folgen.

(i) Die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist das Negative von x eindeutig bestimmt.

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist das Inverse von x eindeutig bestimmt.

(iv) $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(v) Für $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = b + (-a) =: b - a$.

(*Bemerkung.* $b - a$ heißt die **Differenz** von b und a.)

(vi) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = b \cdot (a^{-1}) =: \frac{b}{a}$.

(*Bemerkung.* $\frac{b}{a}$ heißt der **Quotient** von b und a.)