Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 0

⋆⋆⋆

Besprechung am 16., 17. und 18. Oktober 2017

Wiederholung (Induktionsprinzip). Sei $A(n)$ eine von $n \in \mathbf{N}$ abhängige Aussage, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) (Induktionsanfang) $A(1)$ ist wahr;

(ii) (Induktionsschritt) für jedes $n \in \mathbf{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (d.h. ist $A(n)$ wahr, so ist $A(n+1)$ auch wahr).

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbf{N}$.

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbf{N}$ und $S_n = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid f \text{ ist eine Bijektion}\}$.

(i) Beweisen Sie, dass $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ gilt.

(ii) Beschreiben Sie die Menge S_3.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie die Menge aller Drehungen des gleichseitigen Dreiecks, $\mathcal{D}(Dr)$.

Aufgabe 3. Sei S das regelmäßige Sechseck und T das regelmäßige Tetraeder.

(i) Gilt für je zwei beliebige Drehungen r, $s \in \mathcal{D}(T)$, dass $r \circ s = s \circ r$ gilt?

(ii) Dieselbe Frage für $\mathcal{D}(S)$: Gilt für je zwei beliebige Drehungen r, $s \in \mathcal{D}(S)$, dass $r \circ s = s \circ r$ gilt?

Aufgabe 4. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt.

(ii) Das Inverse eines Elements ist eindeutig bestimmt. Genauer: Sei $g \in G$ und seien h, $h' \in G$ mit

$$h * g = e = h' * g.$$

Dann gilt $h = h'$ und h ist Inverses von g.