

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 10

Abgabe bis 12 Uhr am **21. Dezember 2017** im Postfach Ihres Tutors oder direkt vor der Vorlesung in X-E0-222.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (Keine Abgabe - Besprechung am 18., 19. und 20. Dezember).

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe A_4 . Zeigen Sie insbesondere, dass es keine Untergruppe der Ordnung 6 gibt.

Aufgabe 2 (3+2 Punkte).

(i) Sei G eine Gruppe. Sei

$$\text{Aut}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ Isomorphismus}\}$$

die Menge aller Isomorphismen von G auf sich selbst. Zeigen Sie, dass $(\text{Aut}(G), \circ)$ eine Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie $\text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte).

Sei $\sigma \in S_n$ und sei $(a_1 \cdots a_k) \in S_n$ ein k -Zyklus. Zeigen Sie, dass

$$\sigma \circ (a_1 a_2 \cdots a_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\sigma(a_2) \cdots \sigma(a_k)).$$

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte).

- (i) Bestimmen Sie $[S_4 : K]$, wobei $K = \langle (12)(34) \rangle$.
- (ii) Finden Sie eine Untergruppe vom Index 8 in S_4 .
- (iii) Finden Sie ein $\sigma \in S_4$ und ein $H \leq S_4$ mit $\sigma \circ H \neq H \circ \sigma$.