

**Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien**

## Übungsblatt 11

\*\*\*

Abgabe bis 12 Uhr am **11. Januar 2018** im Postfach Ihres Tutors oder direkt **vor** der Vorlesung in X-E0-222.

*Begründen Sie alle Ihre Antworten.*

**Aufgabe 1 (Keine Abgabe - Besprechung am 8., 9. und 10. Januar).**

Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass  $G$  zyklisch ist. Wie viele verschiedene Elemente  $g \in G$  gibt es, die die Gruppe erzeugen?

**Aufgabe 2 (2+2 Punkte).**

(i) Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $H \leq G$  mit  $[G : H] = 2$ . Zeigen Sie, dass  $H \triangleleft G$ .

(ii) Finden Sie zwei echte Normalteiler der Quaternionengruppe  $Q_8$ .

**Aufgabe 3 (2+2 Punkte).**

(i) Sei  $H = \langle (14)(23), (1234) \rangle \leq S_4$ . Zeigen Sie, dass  $H \cong D_4$ .

(ii) Zeigen Sie, dass  $H$  kein Normalteiler von  $S_4$  ist.

**Aufgabe 4 (2+2 Punkte).**

(i) Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist. Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von  $G$ .

(ii) Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $pq$ , wobei  $p$  und  $q$  zwei Primzahlen sind. Zeigen Sie, dass jede echte Untergruppe von  $G$  zyklisch ist.