Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 1

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **19. Oktober 2017** im Postfach Ihres Tutors.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei S das regelmäßige Sechseck. Wieviele Drehungen gibt es in $\mathcal{D}(S)$, die mit sich selber verknüpft die Identität liefern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}_> := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}_>, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und seien $g, h \in G$.

(i) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass
$$(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}.$$

(ii) (2 Bonus Punkte) Zeigen Sie, dass es k_1, $k_2 \in G$ mit $k_1 * g = h$ und $g * k_2 = h$ gibt. Zeigen Sie ferner, dass k_1 und k_2 jeweils eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 4 (**Keine Abgabe** - Besprechung am 23., 24. und 25. Oktober)**.**
Sei $z \in \mathbb{C}$, mit $z = a + ib$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Der **Betrag** von z ist: $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

(i) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ gilt.

(ii) Sei $C := \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass $(C, \cdot)$ eine Gruppe ist. Sei $z \in C$. Was ist z^{-1}?

(iii) Sei $a > 0$ und sei $C_a := \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = a\}$. Zeigen Sie, dass $(C_a, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn $a = 1$.

(In (ii) können Sie das Assoziativgesetz für die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ benutzen.)