

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 2

Abgabe bis 12 Uhr am **26. Oktober 2017** im Postfach Ihres Tutors.**Aufgabe 1 (Keine Abgabe - Besprechung am 30. Oktober).** Sei $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Seien
- $[a]_n, [b]_n \in \mathbb{Z}_n$
- . Zeigen Sie, dass die Multiplikation

$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$

assoziativ ist.

- (ii) Sei $n = pm$, wobei p eine Primzahl ist und $m > 1$. Gibt es ein Inverses von $[p]_n$ bezüglich der Multiplikation in (i) definiert?
- (iii) Sei $\mathbb{Z}_n^* := \{[1]_n, [2]_n, \dots, [n-1]_n\}$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn n eine Primzahl ist.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte).

- (i) Sei
- $H := \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$
- . Überprüfen Sie, dass
- $(H, \cdot)$
- eine Gruppe ist.

- (ii) Sei
- $G := \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$
- . Überprüfen Sie, dass
- $(G, \cdot)$
- eine Gruppe ist.

Sie brauchen nicht die Assoziativität zu überprüfen (Sie können Aufgabe 1 zitieren).

Aufgabe 3 (2+1 Punkte).

- (i) Sei $2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller geraden ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass $(2\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe ist.
- (ii) Ist die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen zusammen mit der Addition eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (2+1+2 Punkte).

- (i) Geben Sie die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_4, +)$ an.
- (ii) Geben Sie die Gruppentafel von der Gruppe $(G, \cdot)$ in Aufgabe 2(ii) an.
- (iii) Definieren Sie eine Bijektion $f : \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\} \rightarrow \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$ derart, dass

$$f(g + h) = f(g) \cdot f(h).$$

(Sie haben einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}_4, +)$ und $(\{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}, \cdot)$ definiert!)