

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 4

Abgabe bis 12 Uhr am **9. November 2017** im Postfach Ihres Tutors oder direkt **vor** der Vorlesung in X-E0-222.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (Keine Abgabe - Besprechung am 6., 7. und 8. November). Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und sei D_n die Menge aller Symmetrien des regelmäßigen n -Ecks (mit Bezeichnungen wie in der Vorlesung). Sei ρ die Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ um P und σ die Spiegelung um die Achse durch 1 und P . Zeigen Sie:

- (i) $|D_n| = 2n$.
- (ii) $\text{ord}(\rho) = n$ und $\text{ord}(\sigma) = 2$.
- (iii) $\sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho^{-1} = \rho^{n-1}$.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte).

- (i) Geben Sie die Gruppentafel von (D_4, \circ) an.
- (ii) Geben Sie zwei Untergruppen von D_4 der Ordnung 2 an.

Aufgabe 3 (2+1+2+1 Punkte). Seien $\rho \in D_{12}$ die Drehung um $\pi/6$ um P und $\sigma \in D_{12}$ eine Spiegelung wie in Aufgabe 1. Bestimmen Sie:

- (i) $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k < 12$ derart, dass die Gleichung

$$\rho^k \circ \sigma = \rho^{25} \circ \sigma \circ (\rho^5 \circ \sigma)^{-1} \circ \rho^{17} \circ \sigma$$

gilt;

- (ii) $\text{ord}(\rho^2)$;
- (iii) $\text{ord}(\rho^k \circ \sigma)$ für $k \in \mathbb{Z}$;
- (iv) die Gruppe $\langle \rho^3 \rangle$, die von ρ^3 erzeugt wird.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Seien (G, \star) eine Gruppe und $g, h \in G$ mit $\text{ord}(g) = \text{ord}(h) = \text{ord}(g \star h) = 2$. Zeigen Sie, dass

$$g \star h = h \star g$$

gilt.