Wintersemester 2017/18 Angela Carnevale

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 5

⋆⋆⋆

Abgabe bis 12 Uhr am **16. November 2017** im Postfach Ihres Tutors oder direkt **vor** der Vorlesung in X-E0-222.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Definition. Seien $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei e_G (bzw. e_H) das neutrale Element von G (bzw. H). Dann definieren wir den *Kern von φ*

$$\operatorname{Ker}\varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\} \subseteq G$$

(d.h. $\operatorname{Ker}\varphi$ ist die Menge aller Elemente in G, die auf das neutrale Element von H abgebildet werden) und das *Bild von φ*

$$\operatorname{Im}\varphi := \{h \in H \mid \exists\, g \in G \text{ mit } \varphi(g) = h\} \subseteq H$$

(d.h. die Menge aller Elemente von H, die unter φ von Elementen aus G getroffen werden).

Aufgabe 1 (**Keine Abgabe** - Besprechung am 13., 14. und 15. November)**.** Seien G, H und φ wie oben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\operatorname{Ker}\varphi$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) $\operatorname{Im}\varphi$ ist eine Untergruppe von H

(iii) φ ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker}\varphi = \{e_G\}$.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und sei $\varphi_n : (\mathbb{Z}, +) \to (D_n, \circ)$ die Abbildung $\varphi_n(k) := \rho^k$.

(i) Zeigen Sie, dass φ_n ein Homomorphismus ist.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{Ker}\varphi_n$.

(iii) Ist φ_n surjektiv?

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)**.** Seien $\rho \in D_{12}$ und $\sigma \in D_{12}$ wie in Blatt 4, Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Untergruppen:

(i) $\langle \rho^2, \sigma \rangle$, die von ρ^2 und σ erzeugte Untergruppe.

(ii) $\langle \rho^3, \sigma \rangle$, die von ρ^3 und σ erzeugte Untergruppe.

(iii) $\langle \rho^4, \sigma \rangle$, die von ρ^4 und σ erzeugte Untergruppe.

(iv) Sind die Untergruppen in (i)–(iii) jeweils isomorph zu geeigneten Diedergruppen?

Aufgabe 4. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_>, \cdot)$, $f(x) := x^2$ ein Homomorphismus ist. Ist f ein Isomorphismus?

Aufgabe 5 (2 Bonuspunkte)**.** Gibt es in $(D_4, \circ)$ eine Untergruppe, die zu $(\mathbb{Z}_5, +)$ isomorph ist? *Tipp:* Aus Blatt 3, Aufgabe 2 kennen Sie $\operatorname{ord}(g)$ für alle $g \in (\mathbb{Z}_5, +)$.