

Ausgewählte Kapitel der Mathematik: Gruppen und Symmetrien

Übungsblatt 6

Abgabe bis 12 Uhr am **23. November 2017** im Postfach Ihres Tutors oder direkt vor der Vorlesung in X-E0-222.

Begründen Sie alle Ihre Antworten.

Aufgabe 1 (Keine Abgabe - Besprechung am 20., 21. und 22. November).

Zeigen Sie, dass S_n für $n \geq 3$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte).

(i) Seien (G, \star) eine Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi_g : G \rightarrow G, \varphi_g(k) := g \star k \star g^{-1}$$

ein Isomorphismus ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seien $\pi, \sigma \in S_n$ mit $\sigma = (ij)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie, dass

$$\text{ord}(\pi) = \text{ord}(\sigma \circ \pi \circ \sigma).$$

Aufgabe 3. (1+1+1 Punkte) Seien

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Elemente von S_6 .

(i) Bestimmen Sie die Zykelzerlegungen von π und σ .

(ii) Überprüfen Sie, ob σ und π kommutieren.

(iii) Bestimmen Sie σ^{-1} und $\text{ord}(\pi^{-1})$.

Aufgabe 4 (2+1 Punkte). Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Untergruppen sind:

(i) $H := \{\sigma \in S_5 \mid \sigma(1) = 1 \text{ und } \sigma(3) = 3\} \subseteq S_5$

(ii) $K := \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(2) = 1\} \subseteq S_4$

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei (G, \star) eine Gruppe. Zeigen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn die Abbildung $\varphi : G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ ein Isomorphismus ist.