Sommersemester 2018 Angela Carnevale

Funktionen

Probeklausur - 1. Juni 2018

⋆⋆⋆

Begründen Sie alle Ihre Antworten in Aufgaben 1–4.

Aufgabe 1.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $T(n) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^j j^2$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$T(n) = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

gilt.

(ii) Sei $A := \{T(2n) : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass die Menge A ein Minimum besitzt.

(iii) Sei $B := \{T(n) : n \leq 10\}$. Zeigen Sie, dass die Menge B ein Minimum und ein Maximum besitzt.

Aufgabe 2.

(i) Formulieren Sie (ohne Beweis) das Archimedische Prinzip.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

gilt.

(iii) Sei $A := \{S(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass die Menge A beschränkt ist.

Aufgabe 3.

(i) Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2iz - 2 = 0.$$

(ii) Skizzieren Sie die Menge $A \cup B$, wobei

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon z^2 - 2iz - 2 = 0\} \qquad \text{und} \qquad B = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1, \operatorname{Im}(z) < 0\}.$$

(iii) Sei jetzt $C := \{|z| \colon z \in A \cup B\} \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\sup C$ und $\inf C$.

(iv) Entscheiden Sie, ob die Menge C ein Maximum bzw. Minimum besitzt.

Aufgabe 4.

(i) Definieren Sie den Begriff "injektive Abbildung".

Sei jetzt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 3|x-2|+1$.

(ii) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist.

(iii) Ist f surjektiv?

(iv) Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{f(x) : x \in \mathbb{R}\} \cap (0, 10]$ ein Maximum besitzt. Hat Sie auch ein Minimum?

Aufgabe 5.
Sind die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch? Sie müssen Ihre Antworten **nicht** begründen.

		Richtig	Falsch
1.	Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = k+1$ ist eine Bijektion.		
2.	Die Menge $(-\infty, 2] \cap [0, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum.		
3.	Die Gleichung $x^3 + 2x^2 + 2x = 0$ hat eine reelle Lösung.		
4.	Die Menge $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$ besitzt ein Minimum.		
5.	Die Gleichung $|z+4| = |z| + 1$ hat eine komplexe Lösung.		
6.	Die Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$ hat eine Umkehrabbildung.		
7.	Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ hat ein Supremum.		
8.	Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.		
9.	Sei $h : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$. Die Menge $\{f(x) : x \in (0,1)\}$ ist beschränkt.		
10.	Sei $h : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$. Die Menge $\{f(x) : x \in (0,1)\}$ ist endlich.		