

ÜBUNGSBLATT 2

Aufgabe 1.

- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

erfüllt ist!

- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die Gleichung

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$$

erfüllt ist!

- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ folgende Ungleichung gilt:

$$2^n > n^3.$$

- Zeigen Sie, dass n Geraden eine Ebene in höchstens $\frac{n^2+n+2}{2}$ Gebiete zerlegen können!

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

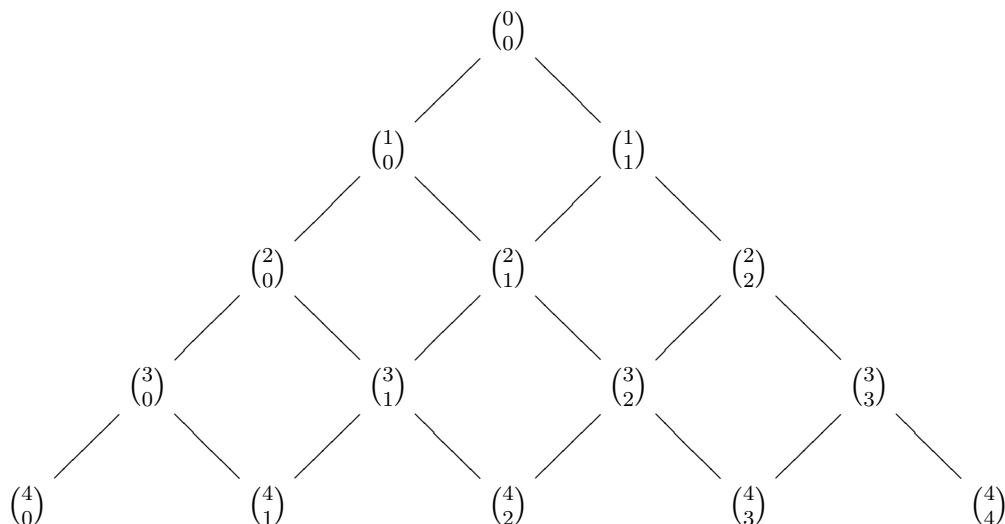
Hinweis: Multiplizieren Sie die linke Seite mit $(x-1)^2$ und berechnen Sie, was dabei herauskommt! Denken Sie dabei auch an Teleskopsummen sowie daran, dass $(x-1)^2 = (x^2 - x) - (x-1)$ ist!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3.

Erstellen Sie das so genannte Pascalsche Dreieck bis zur fünften Reihe!

Hier steht, welche Binomialkoeffizienten dafür zu berechnen sind:



Dabei kann man ausnutzen, dass (wie in Satz 3.2 gezeigt) gilt:

Sind $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$, so ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Berechnen Sie die Zahlen 103^4 und 998^3 mit Hilfe der binomischen Formeln (und mit Hilfe der Werte des Pascalschen Dreiecks, die Sie berechnet haben)!