Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!},$$

also die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen

$$b_n := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in den reellen Zahlen konvergent ist!

Hinweis: Nutzen Sie dazu das Cauchysche Konvergenzkriterium! Schätzen Sie den Abstand zweier Folgenglieder b_m und b_n mit $m > n$ nach oben durch eine Folge ab, die *nur* vom Index n abhängt und die (mit $n \to \infty$) gegen 0 konvergiert!

Aufgabe 2.

- Zeigen Sie, dass die Reihen

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i}$$

  und

  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

  konvergent sind!

- Zeigen Sie, dass die Reihe

  $$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot a_{i+1},$$

  die durch

  $$a_{2k} := \frac{1}{k} \text{ und } a_{2k-1} := \frac{2}{k} \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

  definiert ist, *nicht* konvergiert!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3. Eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe der Absolutbeträge der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, also die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$, konvergent ist.

Zeigen Sie, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist!

Hinweis: Nutzen Sie das Cauchykriterium für die Folge der Partialsummen der Absolutbeträge der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und die Dreiecksungleichung für endlich viele Summanden, also $\left|\sum_{i=k}^{\ell} b_i\right| \leq \sum_{i=k}^{\ell} |b_i|$ für endlich viele $b_i \in \mathbb{R}$, $k \leq i \leq \ell$, aus!