

Konvergenz und Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$

Wie wir in Satz 4.10 gesehen haben, sind die beiden folgenden Aussagen in $\mathbb{R}$ äquivalent:

- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

Im allgemeinen gilt aber nur, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. (Bei dem Beweis dieser Richtung gingen nur die Abschätzungen des Abstandes zweier Folgenglieder zum Grenzwert der Folge und die Dreiecksungleichung ein.)

Die Umkehrung gilt *nicht*! (Beim Beweis ging hier Satz 4.6. (Bolzano-Weierstraß) ein, für diesen Beweis man die *Existenz kleinster oberer Schranken bzw. größter unterer Schranken* in den reellen Zahlen benötigte. Man versucht daher als Gegenbeispiel eine Folge zu finden, für die der Grenzwert *nicht* in $\mathbb{Q}$ liegt.)

Hier die „Ausarbeitung“ des Beispiels aus der Vorlesung:

Wir wählen ein $x_0 := 1$ und definieren rekursiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Natürlich sind alle Folgenglieder der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rational.

Wir zeigen: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchyfolge.

Wir zeigen zunächst, dass $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergent ist.

- Untere Schranke (für $n \geq 1$):¹

$$x_n^2 - 2 = \left(\frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \right) \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x_{n-1} \cdot \frac{1}{x_{n-1}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \left(x_{n-1} - \frac{2}{x_{n-1}} \right) \right)^2}_{\geq 0, \text{ da Quadrat}} \geq 0,$$

also $x_n^2 \geq 2$ für $n \geq 1$.

- Obere Schranke:

$$x_n^2 \leq 2 + \frac{1}{2^n}.$$

Beweis durch vollständige Induktion

– $n = 0$:

$$x_0^2 = 1^2 = 1 \leq 2 + \frac{1}{2^0} = 3$$

¹Da alle $x_n > 0$ sind (bereits gezeigt), kann man ihre Kehrwerte bilden.

– Induktionsvoraussetzung:

$$x_n^2 \leq 2 + \frac{1}{2^n}.$$

– $n \rightarrow n+1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} (x_n^2 + 6), \text{ da } x_n^2 \geq 2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(2 + \frac{1}{2^n} + 6 \right) \text{ (nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 2 + \frac{1}{2^{n+2}} \leq 2 + \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Damit folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 2$.

Da wir wissen, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist, ist also $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_m^2 - x_n^2| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq 2|x_m - x_n| \\ &\leq (x_m + x_n) \cdot |x_m - x_n|, \text{ denn } x_m, x_n \geq 1 \\ &= |(x_m + x_n) \cdot (x_m - x_n)| = |x_m^2 - x_n^2| < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m, n \geq N$.

Also ist auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ selbst eine Cauchyfolge.

Wir zeigen nun: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht in $\mathbb{Q}$.

Wie wir bereits gesehen haben, konvergiert die Folge in $\mathbb{R}$, und zwar gegen $\sqrt{2}$. Würde sie nun in $\mathbb{Q}$ konvergieren, so müsste wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes auch $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gelten. Das ist aber *nicht* der Fall!

Angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Dann ließe sich $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit natürlichen Zahlen a, b schreiben, wobei der Bruch $\frac{a}{b}$ gekürzt ist.

Dann wäre aber $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$, also $2 \cdot b^2 = a^2$. Damit müsste a^2 eine gerade Zahl sein, also auch a gerade – denn: Quadrate ungerader Zahlen sind ungerade – und damit sogar $b^2 = \frac{a^2}{2}$ gerade. Dann wäre aber auch b gerade. Widerspruch! ($\frac{a}{b}$ war ein gekürzter Bruch.)