

ÜBUNGSBLATT 10

Aufgabe 1. Suchen Sie Konstanten B , k und λ für eine logistische Funktion

$$f(x) := \frac{B}{1 + ke^{-\lambda Bx}}$$

so dass folgende Messwerte relativ gut approximiert werden:

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	3	15	60	150	270	450	630	750	840	885	897

Aufgabe 2. Wir zählen die Anzahl der Feldsperlinge in einem fest vorgegebenen Gebiet (und nehmen an, dass wir sie alle gut zählen können).

Die Zahl der Ferldsperlinge soll durch die Funktion

$$f(t) = \frac{200}{1 + 3 \cdot e^{-\frac{t}{2}}}$$

gegeben sein, wobei t die Zeit in Jahren seit der ersten Zählung angibt.

- (a) Wieviele Feldsperlinge konnten wir bei unserer ersten Zählung (zum Zeitpunkt $t = 0$) ermitteln?
- (b) Wie groß ist die Population nach vier Jahren? Wie groß ist sie nach zehn Jahren?
- (c) Wie groß ist die (momentane) Wachstumsrate nach vier Jahren, und wie groß ist sie nach zehn Jahren?
- (d) Wann hat die Population ihre größte Vitalität?

Aufgabe 3. Angenommen wir haben folgende Daten ermittelt:

x_i	1	2	4	5
y_i	4	5,25	9,3	12,2

Finden Sie eine Exponentialfunktion, die die Daten möglichst gut approximiert!

Hinweis: Zeichnen Sie die Daten in ein Koordinatensystem auf logarithmischem Papier ein und bilden Sie (rechnerisch) die Regressionsgerade für diese Daten. Zu dieser Geraden gehört dann wieder eine Exponentialfunktion. Diese ist gesucht.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4.

- (a) Zeigen Sie, dass die Michaelis-Menten-Funktion

$$f(x) := \frac{Bx}{x + K},$$

wobei $B, K \in \mathbb{R}$ fest sind, die Differentialgleichung

$$f'(x) = \frac{K}{B} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (f(x))^2$$

erfüllt!

- (b) Zeichnen Sie die Funktion für $B = K = 1$.
(c) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{(f(x))^2}{x^2}$$

im Bereich von $(0|0)$ bis $(10|5)$.