ÜBUNGSBLATT 12

Aufgabe 1. Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_3 . Diese hat genau eine Untergruppe U der Ordnung 3, die, wie wir bereits gesehen haben, ein Normalteiler ist.

- Bestimmen Sie die Nebenklassen, die die Untergruppe U in S_3 liefert!
- Stellen Sie eine Gruppentafel für die Faktorgruppe S_3/U auf!
- Zu welcher Gruppe ist S_3/U isomorph?

Aufgabe 2. Wir betrachten wiederum die symmetrische Gruppe S_3 und deren Untergruppe

$$H := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeigen Sie, dass man mit der Verknüpfung $(g \circ H) * (g' \circ H) := (g \circ g') \circ H$ keine vernünftige Gruppenstruktur auf der Menge S_3/H der Nebenklassen von H in S_3 erhält!

Hinweis: Nehmen Sie dazu

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad g' := g^{-1}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und zeigen Sie, dass $g \circ h \circ g' \circ h \notin (g \circ g') \circ H$ ist, also *nicht* $(g \circ H) \circ (g' \circ H) = (g \circ g') \circ H$ gilt!

Zeigen Sie, dass das Problem auch bei jeder anderen Untergruppe der S_3 mit Ordnung 2 auftritt, indem Sie jeweils geeignete Elemente $g, g' \in G$ und h aus der entsprechenden Untergruppe wählen!

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Gruppe G der Ordnung 10.

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Sylowsätze die möglichen Anzahlen der 2- und der 5-Sylowuntergruppen von G !
- Zeigen Sie mit Hilfe von Beispielen (Dreh- und Diedergruppen regelmäßiger n -Ecke), dass alle im ersten Teil dieser Aufgabe bestimmten möglichen Anzahlen für 2-Sylowuntergruppen für verschiedene G tatsächlich auftreten! Listen Sie jeweils alle 2-Sylowuntergruppen auf! Wie sehen die 5-Sylowuntergruppen in den Fällen aus?