

ÜBUNGSBLATT 3

Aufgabe 1. Sei S_n die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ auf sich (mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung). Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

$$(f, m) \mapsto f(m)$$

eine Gruppenoperation von S_n auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ bildet!

Aufgabe 2. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$. Zeigen Sie:

- Die Elemente

$$\text{id} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

bilden eine Untergruppe H von S_4 .

- Diese Gruppe H operiert auf der Menge $M := \{1, 2, 3, 4\}$.
Genauer: Sie liefert eine Gruppenoperation $* : H \times M \rightarrow M$ vermöge $(h, m) \mapsto h(m)$.
Berechnen Sie für $2 \in M$ die Bahn $H * 2$ und den Stabilisator H_2 !

Aufgabe 3. Gegeben sei ein Quadrat mit Mittelpunkt p und Seitenlänge 2 cm. Wir betrachten die Gruppe der Drehungen des Quadrates um p , die das Quadrat in sich überführen. Wir identifizieren zwei Drehungen, wenn sie sich um (Vielfache von) 360° unterscheiden.

Zeichnen Sie eine Folge von Bildern, die die Drehgruppe des Quadrates veranschaulichen!

Gegeben sei nun ein Punkt, der auf einer Diagonalen des Quadrates liegt und Abstand 1 cm vom Mittelpunkt p hat. Zeichnen Sie einen solchen Punkt in das Quadrat ein, das die Drehung um 0° veranschaulicht, und markieren Sie dann in den anderen Bildern, wohin der Punkt bei den Drehungen „wandert“.

Was ist der Stabilisator des Punktes? Was ist seine Bahn?