

ÜBUNGSBLATT 4

Aufgabe 1. Gegeben sei eine Gruppe $(G, *)$ und eine Untergruppe $H \subseteq G$.

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung $H \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto h * g$, eine Gruppenoperation der Gruppe $(H, *)$ auf der Menge G gegeben ist!

Aufgabe 2. Gegeben sei ein Dodekaeder; das ist ein konvexes Polyeder mit (zwölf) regelmäßigen Fünfecken als Seitenflächen.

Bestimmen Sie (mit Hilfe des Fundamentallemmas für endliche Gruppen) die Ordnung der Drehgruppe des Dodekaeders (= der Gruppe der Drehungen im Raum, die das Dodekaeder in sich überführen)!

(Wer sich das Aussehen eines Dodekaeders nicht gut bildlich vorstellen kann, sollte sich einfach zur Hilfe eines basteln...)

Aufgabe 3.

- Sei $(G, *)$ eine kommutative Gruppe, die auf einer Menge M operiert. Zeigen Sie, dass dann $G_m = G_n$ für alle $m, n \in M$, die in einer G -Bahn liegen, gilt! (Hierbei bezeichnet G_m bzw. G_n den Stabilisator von $m \in M$ bzw. $n \in M$ in G . Zwei Elemente $m, n \in M$ liegen in einer G -Bahn, wenn es ein $g \in G$ gibt mit $g \diamond m = n$, wobei $\diamond : G \times M \rightarrow M$ die Gruppenoperation bezeichnet.)
- Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass es zu je zwei Elementen $g, h \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $g^n = h^n$ ist!