Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Gegeben sei die Diedergruppe D_n eines regelmäßigen n-Ecks mit $n \geq 3$. Zeigen Sie:

- Ist n ungerade und hat $g \in D_n$ Ordnung 2, so ist g eine Spiegelung.
- Ist n gerade und hat $g \in D_n$ Ordnung 2, so ist g entweder eine Spiegelung oder die Drehung um 180°.

Aufgabe 2. Wir betrachten im Folgenden die Symmetriegruppe $(G, \circ)$ eines Rechtecks, das *kein* Quadrat ist – das ist die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen mit ihrer Hintereinanderausführung als Verknüpfung, die das nicht-quadratische Rechteck in sich überführen.

Die Gruppe $(D_2, \cdot)$ sei wie in der Vorlesung gegeben durch $\langle d, s \rangle$, wobei die Relationen $d^2 = e$, $s^2 = e$ und $d^{-1}s = sd$ gelten sollen. Hierbei bezeichnet $e \in D_2$ das neutrale Element.

Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus zwischen $(D_2, \cdot)$ und $(G, \circ)$ gibt!

Hinweis: Erstellen Sie zunächst eine Liste mit Bildern, die die möglichen Drehungen und Spiegelungen des Rechtecks zeigen! Schreiben sie auch auf, welche Elemente D_2 enthält! (Dann steht ein Isomorphismus schon fast da. . .)

Aufgabe 3. Gegeben sei die Diedergruppe D_4 eines Quadrates. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung für die Drehungen und Spiegelungen sowie $e \in D_4$ als neutralem Element bilden wir nun die Teilmengen $G := \{e, d_2, a_1, a_3\}$ und $H := \{e, d_2, a_2, a_4\}$ von D_4.

- Zeigen Sie, dass G und H Untergruppen von D_4 sind!
- Zeigen Sie, dass G und H, obwohl sie offensichtlich verschiedene Untergruppen von D_4 sind, als abstrakte Gruppen isomorph sind!

Späteste Abgabe: Fr, 5.6.2009, 10.50 Uhr

Angela Holtmann