Name Matrikelnummer

KLAUSUR 1

Pro Aufgabe sind maximal vier Punkte zu erreichen.

Auf jedem Klausurblatt sind mindestens der Name <u>*oder*</u> *die Matrikelnummer anzugeben, auf dem obersten Blatt beides.*

Aufgabe 1. Richtig oder falsch?
(1 Punkt pro richtige Antwort, −1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null bildet eine kommutative Gruppe bezüglich der Addition.	O	O
• In jeder kommutativen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.	O	O
• Die Untergruppe $n\mathbb{Z}$ (mit $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$) von $(\mathbb{Z}, +)$ (den ganzen Zahlen mit der Addition) hat genau n Elemente.	O	O
• Die Diedergruppe D_n eines regelmäßigen n-Ecks ist für $n \geq 3$ zyklisch.	O	O

Angela Holtmann

Name Matrikelnummer

Aufgabe 2. Definitionen.
(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was die *Ordnung eines Gruppenelementes* ist!
- Definieren Sie, was ein *Kern eines Gruppenhomomorphismus* ist!

Name Matrikelnummer

Aufgabe 3. Beweise.
(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Zeigen Sie, dass es in einer Gruppe nur ein neutrales Element geben kann!
- Zeigen Sie, dass eine Untergruppe U einer Gruppe G ein Normalteiler ist, wenn $U = g * U * g^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt.

Name Matrikelnummer

Aufgabe 4. Rechnungen.
(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_5 mit der üblichen Hintereinanderschaltung von Permutationen als Verknüpfung. Berechnen Sie folgende Elemente:
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
- Gegeben sei ein regelmäßiges Dreieck, dessen Ecken wir gegen den Uhrzeigersinn durchnummerieren. Wir betrachten die Symmetriegruppe des Dreiecks (mit de üblichen Hintereinanderschaltung als Verknüpfung). Mit s bezeichnen wir hierin die Spiegelung an der Achse durch den Eckpunkt 1 und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, mit d die Drehung des Dreiecks um seinen Mittelpunkt mit Drehwinkel $120°$ gegen den Uhrzeigersinn und mit t die Spiegelung an der Achse durch den Eckpunkt 2 und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Was sind die folgenden Hintereinanderschaltungen der Abbildungen?
  - $d \circ s$
  - $s \circ t$

Name Matrikelnummer

Aufgabe 5. Richtig oder falsch?
(1 Punkt pro richtige Antwort, -1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Jede Gruppe der Ordnung 10 besitzt genau eine Untergruppe der Ordnung 5 und mindestens eine Untergruppe der Ordnung 2.	O	O
• Die Drehgruppe eines Tetraeders beisitzt genau 7 Drehachsen.	O	O
• Die Drehgruppe eines regelmäßigen 27-Ecks ist isomorph zu einer Untergruppe der Drehgruppe eines regelmäßigen 54-Ecks.	O	O
• Bei einer Gruppenoperation $\diamond : G \times M \to M$ einer Gruppe G auf einer Menge M ist die Ordnung des Stabilisators $$G_m := \{g \in G \mid g \diamond m = m\}$$ von $m \in M$ ein Teiler der Ordnung von G.	O	O

Name Matrikelnummer

Aufgabe 6. Definitionen.
(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was die *Bahn eines Elementes unter einer Gruppenoperation* ist!
- Definieren Sie, was eine p-*Gruppe* (für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$) ist!

Name Matrikelnummer

Aufgabe 7. Beweise.
(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Gegeben seien eine Gruppe $(G, *)$ und eine Untergruppe U von G. Zeigen Sie, dass dann die Mengen $g * U * g^{-1}$ für alle $g \in G$ ebenfalls Untergruppen von G sind!
- Gegeben sei eine Gruppe G der Ordnung $|G| = 33$. Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe der Ordnung 11 und genau eine Untergruppe der Ordnung 3 hat.

Angela Holtmann

Name Matrikelnummer

Aufgabe 8. Rechnungen.
(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Wir betrachten die ganzen Zahlen mit der Addition, also $(\mathbb{Z}, +)$, und die Untergruppen $5\mathbb{Z}$, $10\mathbb{Z}$ und $20\mathbb{Z}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Isomorphiesätze für Gruppen, zu welcher Gruppe $(5\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ isomorph ist!

- Gegeben sei die symmetrische Gruppe S_3. Berechnen Sie, welche Teilmenge von S_3 bei Konjugation der Menge $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ entsteht!

Name Matrikelnummer

Aufgabe 9. Richtig oder falsch?
(1 Punkt pro richtige Antwort, −1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Jede Gruppe der Ordnung 27 besitzt ein Element der Ordnung 3.	O	O
• Jede Gruppe der Ordnung 4 ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4.	O	O
• $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.	O	O
• Jede Gruppe der Ordnung 385 besitzt genau eine Untergruppe der Ordnung 7.	O	O

Name Matrikelnummer

Aufgabe 10. Definitionen.
(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was eine *zyklische Gruppe* ist!
- Definieren Sie, was das *direkte Produkt zweier Gruppen* ist!

Name Matrikelnummer

Aufgabe 11. Beweise.
(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Gegeben sei die Untergruppe $4\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{Z}, +)$, also den ganzen Zahlen mit der Addition. Wir betrachten nun die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann $17+4\mathbb{Z} = 41+4\mathbb{Z}$ gilt!
- Gegeben seien zwei Gruppen G und H. Die Gruppe G habe nur Elemente der Ordnung ≤ 2, die Gruppe H habe dagegen ein Element der Ordnung 3. Zeigen Sie, dass G und H nicht isomorph sein können!

Angela Holtmann

Name Matrikelnummer

Aufgabe 12. Rechnungen.
(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Gegeben seien die ganzen Zahlen mit der Addition, also $(\mathbb{Z}, +)$. Berechnen Sie die von 17 und 34 in $\mathbb{Z}$ erzeugte Untergruppe, also $\langle 17, 34 \rangle$!
- Gegeben sei die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ von $(\mathbb{Z}, +)$ nach der Untergruppe $6\mathbb{Z}$. Berechnen Sie, wobei das Ergebnis in der Form $x + 6\mathbb{Z}$ mit $0 \leq x \leq 5$ zu notieren ist:
  - $(23 + 6\mathbb{Z}) + (7 + 6\mathbb{Z})$
  - $(-25 + 6\mathbb{Z}) + (36 + 6\mathbb{Z})$

Angela Holtmann