Kommentare zu den Aufgaben der zweiten Klausur vom 29.9.2009

Aufgabe 1.

- Hier handelt es sich um ein sehr einfaches Gegenbeispiel dafür, dass etwas keine Gruppe ist.
- Ein ganz einfaches Gegenbeispiel, das immer wieder vorkam, ist die symmetrische Gruppe S_3. Diese hat eine Untergruppe der Ordnung 3, nämlich diejenigen Permutationen, die den Drehungen eines regelmäßigen Dreiecks um seinen Mittelpunkt entsprechen, also $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$, und S_3 ist nicht kommutativ – das war eine Übungsaufgabe (und wurde immer wieder benutzt).
- Hier wurde im Gegensatz zur ersten Klausur nach $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gefragt, eine Gruppe, die immer wieder vorkam, zum Beispiel als Drehgruppe eines regelmäßigen n-Ecks.
- Die Gruppen $(C_n, \circ)$ haben wir lange besprochen, insbesondere auch, dass die Gruppen von einer Drehung erzeugt werden, z. B. der Drehung um $\frac{360°}{n}$. Nun muss man nur noch wissen, was eine „zyklische Gruppe“ ist.

Aufgabe 2.

- Das sind Definitionen, die immer wieder vorkamen.
- Bei Teil 2 sollte man darauf achten, dass man zwei Bedingungen hat:
  1. Es handelt sich um eine Untergruppe U einer gegebenen Gruppe $(G, *)$.
  2. Es gilt: $g * U = U * g$ für alle $g \in G$ (und nicht nur für ein festes $g \in G$ oder für alle $g \in U$).

Aufgabe 3.

- Teil 1 sollte man problemlos hinschreiben können, sobald man nur weiß, was das Bild eines Gruppenhomomorphismus und eine Untergruppe ist. Es mussten jeweils die Elemente aus G angegeben werden, die durch den Gruppenhomomorphismus f auf das fragliche Element in den drei Bedingungen abgebildet wurden (und nachgerechnet werden, dass die Elemente das tun).

  Auch ist nicht jeder Gruppenhomomorphismus surjektiv. Es gab vermeintliche „Beweise“, die das impliziert hätten.
- Teil 2 ist (wie auch Teil 1 in Aufgabe 3 der ersten Klausur) eine Standardaufgabe, mit der man hätte sicherlich rechnen können. Hier wurde manchmal (unnötig) benutzt, dass die Gruppe kommutativ ist, aber das ist ja auch nicht immer der Fall.

Aufgabe 4.

- Wer die Hintereinanderschaltung von zwei Permutationen nicht berechnen kann, …(s. Kommentar zur ersten Klausur).
- Wieder gab es volle Punktzahl, wenn Zeichnungen zeigten, dass das Richtige gemeint war.

  Es wurden zweimal Drehungen der Ebene von 90° gegen den Uhrzeigersinn als Ergebnis genannt, um ein regelmäßiges Dreieck in sich zu überführen. Dann wird das Dreieck aber gar nicht wieder auf sich abgebildet…

Aufgabe 5.

- Hier ging es darum, sich daran zu erinnern, wann man überhaupt eine Faktorgruppe bilden kann. Man braucht dazu, wie in der Vorlesung in einem Lemma gezeigt, einen Normalteiler.
- Nachdem in der ersten Klausur korrekterweise die Zahl 7 angegeben wurde, ist hier natürlich 8 falsch.
- Man nimmt einfach eine Drehung um $\frac{3 \cdot 360^\circ}{27} = \frac{360^\circ}{9}$. Die tut's…
- Hier hatte ich in der Vorlesung extra darauf hingewiesen, dass es nicht ausreicht, dass eine Teilmenge eine Mächtigkeit hat, die ein Teiler der Gruppenordnung ist, um eine Untergruppe zu erhalten. Einfaches Beispiel: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, Teilmenge $\{1 + 2\mathbb{Z}\}$. $|\{1 + 2\mathbb{Z}\}| = 1$ ist ein Teiler von $2 = |G|$, aber $\{1 + 2\mathbb{Z}\}$ ist <u>keine</u> Untergruppe.

Aufgabe 6.

- Bei Teil 1 muss man wieder die Gruppenoperation benennen. Warum dann manchmal Bedingungen beim Stabilisator auftauchten, die hätten von Gruppenhomomorphismen kommen können, ist mir vollkommen unklar.
- Hier war nur nach einer p-Sylowgruppe gefragt, nicht nach einer p-Untergruppe einer gegebenen Gruppe. Außerdem muss natürlich ein Zusammenhang bestehen zwischen den kombinatorischen Bedingungen an die Gruppe G und der Menge, die eine p-Sylowuntergruppe sein soll. (Das muss eine Untergruppe der gegebenen Gruppe sein, sie sollte auch Elemente aus G enthalten und nicht eine (Prim-)Zahl p sein – eine Zahl ist ja keine Menge…)

Aufgabe 7.

- Anzugeben war eine bijektive Abbildung $f : U \to g * U * g^{-1}$, z. B. $u \mapsto g * u * g^{-1}$, wobei die Umkehrabbildung dann $f^{-1} : g * U * g^{-1} \to U$ durch $g * u * g^{-1} \mapsto g^{-1} * g * u * g^{-1} * g \quad (= u)$ gegeben ist.
- Das ist eine Standardaufgabe, die in der Vorlesung als auch bei den Übungsaufgaben vorkam.

Aufgabe 8.

- Hier sollte man darauf achten, dass dort $(5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})$ steht, am Anfang also $5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ mit $10\mathbb{Z}$. Dann sieht man sofort, dass
$$(5\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(10\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{0\}$$
gilt, also die Gruppe zur trivialen Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht, isomorph ist. Sobald aber nur $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ oder etwas in der Form G/G dastand, gab es volle Punktzahl.
- Hier muss man wieder (wie auch in der ersten Klausur) wissen, was Konjugation einer Menge mit einem Element bedeutet, und in der symmetrischen Gruppe S_3 rechnen können. Es wurde auch der Rechenweg geprüft, da durch manche Rechnungen zwar das richtige Ergebnis herauskam, jedoch offensichtlich nicht klar war, was Konjugation ist.

Aufgabe 9.

- Teil 1 ist eine Anwendung des Satzes von Cauchy.
- Oft besprochen, aber teilweise nicht gewusst…
- Das sind gerade zwei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung p^2. (Die erste Gruppe ist zyklisch, die zweite ist nicht zyklisch. (Was sollte denn ein Erzeuger sein? Alle Elemente haben Ordnung $\leq p$.)) Ich hatte auch beim Chinesischen Restsatz darauf hingewiesen, dass hier p und q zwei <u>verschiedene</u> Primzahlen sein müssen (und beim Beweis, wo das eingeht).
- 37 ist eine Primzahl. Damit können (nach dem Satz von Lagrange) Untergruppen so einer Gruppe nur die Ordnungen 1 oder 37 haben, müssen also die Gruppe selbst oder die Gruppe sein, die nur aus dem neutralen Element besteht. In beiden Fällen kann man keinen Normalteiler finden, der verschieden von der Gruppe selbst und der Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht, ist. (Hier muss man natürlich wissen, was eine „einfache Gruppe“ ist, aber mit Blick auf die erste Seite der Klausur hätte man das notfalls sogar noch nachsehen können. Da stand gerade, was es heißt, dass eine Gruppe <u>nicht</u> einfach ist.)

Aufgabe 10.

- Es reicht für zyklische Gruppen zu fordern, dass es ein Element gibt, was die Gruppe erzeugt, also, mit dessen Potenzen (nicht-negativen wie negativen) alle Elemente der Gruppe dargestellt werden können. Welche Fälle es da genau gibt, muss man nicht angeben. (Das wurde dann aber einfach durchgestrichen, auch wenn da teilweise Falsches stand.)
- Bei Halbgruppen wird gerade <u>nicht</u> gefordert, dass es ein neutrales Element gibt...

Aufgabe 11.

- Hier die Lösung, die in der Vorlesung vorkam, und bei den Übungsaufgaben als Anwendung immer wieder gebraucht wurde.

  Sei $g_1 * H = g_2 * H$, $e \in G$ das neutrale Element. Dann gilt:

  $$H = g_1^{-1} * g_1 * H = g_1^{-1} * g_2 * H.$$

  Insbesondere gilt dann $g_1^{-1} * g_2 = g_1^{-1} * g_2 * e \in H$.
- Es war kurz durchzurechnen, dass die von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ erzeugte Untergruppe U gerade die ist, die ich schon oben bei den Hinweisen zu Aufgabe 1 genannt habe. Es gab im Wesentlichen nun zwei Möglichkeiten, um zu zeigen, dass es sich bei U um einen Normalteiler handelt:

  1. Direktes Nachrechnen (unter Nutzung der Charakterisierung von Normalteilern): Konjugation von U mit <u>allen</u> Elementen aus S_3 und zeigen, dass die entstehende Menge eine Teilmenge von U ist. (Hier musste man natürlich wissen, was die Konjugation einer Menge mit einem Element ist.)
  2. Berechnung mit Hilfe der Sylowsätze, dass U die <u>einzige</u> 3-Sylowuntergruppe von S_3 ist. Anwendung des Sylowsatzes, dass alle 3-Sylowuntergruppen von S_3 konjugiert sind. Damit folgt: $g * U * g^{-1}$ liegt für jedes $g \in S_3$ wieder in einer 3-Sylowuntergruppe von S_3, also, da es nur <u>eine</u> davon gibt, wieder in U.

Aufgabe 12.

- Beim ersten Teil war zu zeigen, dass $1 \in \langle 5, 7\rangle$ gilt, dann ist natürlich $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle \subseteq \langle 5, 7\rangle$, also, da $\langle 5, 7\rangle \subseteq \mathbb{Z}$, auch $\langle 5, 7\rangle = \mathbb{Z}$.

  Es gilt: $1 \in \langle 5, 7\rangle$, da $15 = 5 \cdot 3 \in \langle 5, 7\rangle$ sowie $-14 = 7 \cdot (-2) \in \langle 5, 7\rangle$, und damit $1 = 15 + (-14) \in \langle 5, 7\rangle$.

  (Alternativ kann man, wenn man das nicht explizit ausrechnen will, auch mit dem Lemma von Bézout argumentieren, was besagt, dass $1 = \mathrm{ggT}(5, 7)$ eine ganzzahlige

Linearkombination von 5 und 7 ist, also ganze Zahlen a, b existieren mit $1 = 5 \cdot a + 7 \cdot b$. Zumindest muss aber der Name des Lemmas und die Aussage in dem Spezialfall erwähnt werden.)

- Hier wieder eine Rechenaufgabe. Wieder gab es einen Trostpunkt für richtige Rechnungen, wenn das Ergebnis nicht in der geforderten Form mit $0 \leq x \leq 3$ angegeben wurde. Und wieder waren die Ergebnisse manchmal einfach falsch. . . :-(