

PROBEKLAUSUR¹

Pro Aufgabe sind maximal vier Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1. Richtig oder falsch?

(1 Punkt pro richtige Antwort, -1 Punkt pro falsche Antwort, 0 Punkte pro Nicht-Antwort)

	Richtig	Falsch
• Jede Gruppe der Ordnung 15 hat genau vier verschiedene Untergruppen.	☐	☐
• Die Diedergruppe eines regelmäßigen n -Ecks ist für alle $n \geq 3$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n einer n -elementigen Menge.	☐	☐
• Die Drehgruppe eines regelmäßigen Fünfecks ist einfach.	☐	☐
• Bei einer Gruppenoperation $\diamond : G \times M \rightarrow M$, $(g, m) \mapsto g \diamond m$ einer Gruppe G auf einer Menge M ist die Stabilisatorordnung $ G_m $ ein Teiler der Bahnenlänge $ G \diamond m $.	☐	☐

Aufgabe 2. Definitionen.

(2 Punkte pro richtige Antwort)

- Definieren Sie, was die *Ordnung einer Gruppe* ist!
- Definieren Sie, was eine *p-Untergruppe einer Gruppe* ist!

Aufgabe 3. Beweise.

(2 Punkte pro richtigen Beweis)

- Zeigen Sie, dass der Kern eines Gruppenmonomorphismus nur aus dem neutralen Element besteht!
- Zeigen Sie, dass für einen Normalteiler N in einer Gruppe $(G, *)$ immer gilt:

$$N \subseteq g * N * g^{-1}$$

für alle $g \in G$.

¹**Achtung!** Diese Klausur hat nur ein *Drittel* des Umfangs der echten Klausur, soll aber zeigen, wie (GHR-)Klausuren (bei mir) aufgebaut sind und mit welcher Art von Aufgaben zu rechnen ist.

Aufgabe 4. Rechnungen.

(2 Punkte pro richtige Teilaufgabe)

- Berechnen Sie die Hintereinanderschaltung der folgenden Elemente der symmetrischen Gruppe S_6 :²

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$

- Gegeben sei die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition als Verknüpfung. Bestimmen Sie die Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, die von der Menge $\{13, 52, 2704\} \subseteq \mathbb{Z}$ erzeugt wird (mit Begründung)!

²Hier sind nun ausnahmsweise zwei Aufgaben in dem Aufgabenteil gestellt, aber hierbei handelt es sich ja um absolute Miniaufgaben, die man noch in derselben Zeile lösen kann.